

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Oran 2 Mohamed Ben Ahmed

## **Electrotechnique I**

---

Résumés de cours et Exercices Corrigés pour les niveaux de deuxième année licence génie industriel, génie électromécanique.

*Dr Chouitek.Mama*

Institut de Maintenance et Sécurité Industriel, Université Oran 2. Mohamed Ben Ahmed

---

## Avant-propos

L'électrotechnique est une matière assez vaste qui possède ses particularités, son langage propre, ses outils incontournables, et nécessite des bases solides en manipulation des circuits et des puissances électriques. La rigueur nécessaire à l'étude des systèmes triphasés et des machines électriques, en commençant par l'étude de leurs circuits magnétique. Voilà pourquoi cet ouvrage propose, pour chaque thème abordé une progression identique :

Une synthèse de cours qui présente les notions « incontournables

Ce recueil d'exercices corrigés est un outil complémentaire aux exercices du manuel de référence du cours d'électrotechnique, pour aider les étudiants en deuxième année licence génie industriel ou génie mécanique, deux spécialités qui existent à l'institut de maintenance et sécurité industrielle à l'université Oran2.

Afin de se préparer à réussir les examens, il est conseillé de d'abord de faire et comprendre tous les exercices suggérés dans vos fiches de Travaux. Ceci devrait être suffisant pour bien faire aux examens. Ensuite, si vous avez encore du temps pour mieux vous préparer, vous pouvez consulter ce recueil pour raffiner votre préparation. L'idée n'est pas de faire tous ces exercices. Il y en a beaucoup trop. Mais vous pouvez fureter dans ce recueil et choisir des exercices au hasard pour voir si vous êtes bien préparés. Ces exercices proviennent de vieux examens et aussi d'anciens livres et que j'ai pu ramasser au cours de ma carrière. Ils devraient donc vous donner une bonne idée de l'allure des examens. Je ne vous encourage pas à vous référer trop rapidement aux solutions. Tentez d'abord de vraiment résoudre les problèmes sur papier. Si vous n'êtes pas certains de vous, vous pouvez ensuite consulter les indices. Ils devraient vous permettre de démarrer. Vous pouvez finalement consulter les solutions pour vérifier si vous avez bien résolu les problèmes.

Dr *CHOUITEK Mama*

*Chargée de cours électrotechnique Deuxième Année Licence à l'IMSI Université Oran2.*

## **SOMMAIRE**

	Avant propos	
Chapitre I	Utilisation des nombres complexes en électrotechnique	1
I.1	Operations sur les nombres complexes	2
I.2	Différentes formes d'écritures des nombres complexes	3
I.3	Calcul dans C.	3
	Exercices chapitre I	5
	Solution Des Exercices Chapitre I	6
Chapitre II	Analyse des circuits en régime permanent	9
II.1	Analyse circuit en régime monophasé	10
II.2	Transformation dans le domaine de phase des composants passifs (R.L.C.)	11
II.3	Puissances en régime monophasé	12
	Exercices chapitre II	16
	Solution Des Exercices Chapitre II	20
Chapitre III	Régime triphasé	26
III.1	Analyse des systèmes triphasés	27
III.2	Puissances en triphasé	31
III.3	<i>Relèvement du facteur de puissance</i>	31
	Exercices chapitre III	32
	Solution Des Exercices Chapitre III	37
Chapitre VI	Circuit magnétique	43
IV-1	Généralité et paramètres de circuit magnétique	44
IV-2	Circuits magnétiques homogènes linéaires	44
IV-3	Circuits magnétiques hétérogènes linéaires	45
IV-4	Analogie avec les circuits électriques	45
	Exercices chapitre IV	48
	Solution Des Exercices Chapitre IV	53
Chapitre V	Transformateur monophasé	60
V-1	Généralité du transformateur monophasé	61
V-2	Transformateur parfait ou idéal	61
V-3	Transformateur réel	63

V-4	Rendement du transformateur	65
	Exercices chapitre V	66
	Solution Des Exercices Chapitre V	69

Chapitre I

***Utilisation des nombres complexes en électrotechnique***

## I- NOMBRES COMPLEXES EN ELECTROTECHNIQUE

Généralement, les nombres complexes sont étudiés dans tous les domaines des mathématiques. On se limitera donc ici à quelques notions nécessaires à l'application des nombres complexes à l'électricité.

### I.1. OPERATIONS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

On admet l'existence d'un nombre  $i$  de carré  $-1$  et on appelle nombre complexe, tout «nombre» de la forme :

$$z = a + ib$$

Où  $a$  et  $b$  sont des réels. C'est en 1801 que Gauss a introduit les nombres de la forme  $a+ib$ .

$a$  est la partie réelle de  $z$  et est noté  $\text{Re}(z)$  ;

$b$  est la partie imaginaire de  $z$  et est noté  $\text{Im}(z)$ .

#### a) Affixe d'un point

Il convient de représenter un nombre complexe dans un plan muni d'un repère orthonormé  $(0 ; \vec{u} ; \vec{v})$  en assimilant le nombre complexe  $a + ib$  à un couple de coordonnées  $(a, b)$ . Ce plan muni d'un repère  $(0 ; \vec{u} ; \vec{v})$  s'appelle "plan complexe". Dans ce plan complexe, l'axe  $(0 ; \vec{u})$  est appelé "axe réel" et l'axe  $(0 ; \vec{v})$  est appelé "axe imaginaire"

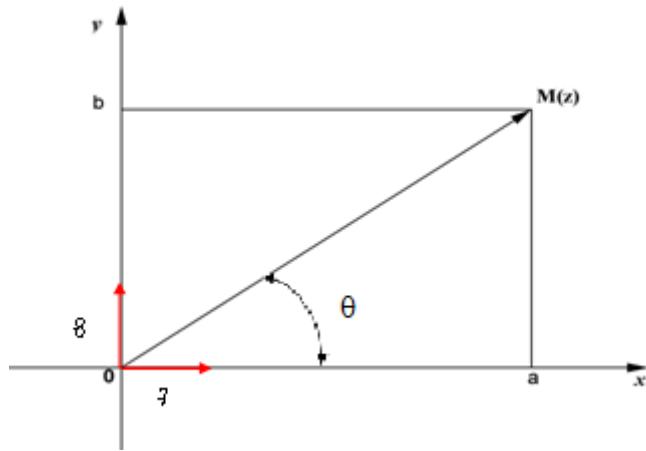


Figure I.1 : Représentation d'un nombre complexe  $z=a+ib$  dans un plan complexe

#### b) Module d'un nombre complexe

Le module d'un nombre complexe  $z = a + ib$ , est noté  $|z|$  et est égal à  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  | Le module d'un nombre complexe est la norme du vecteur  $\overrightarrow{OM}$ .

#### c) Argument d'un nombre complexe

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(0 ; \vec{u} ; \vec{v})$ , la position d'un point  $M$  d'affixe  $z$  peut être donnée par ses coordonnées polaires c'est-à-dire par la distance  $OM$ , module de  $z$ , et par l'angle orienté  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ .

L'argument du nombre complexe  $z = a + ib$ , noté  $\text{Arg}(z) = \theta$ , est l'angle  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$  tel que :

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

## I.2. - DIFFERENTES FORMES D'ECRITURES DES NOMBRES COMPLEXES

Le nombre complexe  $z$  peut s'écrire sous quatre formes différentes.

<i>Forme algébrique</i>	$\underline{z} = a + ib$
<i>Forme trigonométrique</i>	$\underline{z} =  z  (\cos \theta + i \sin \theta)$
<i>Forme exponentielle</i>	$\underline{z} =  z  e^{i\theta}$
<i>Forme polaire</i>	$\underline{z} = [ z , \theta]$

## I.3. - CALCUL DANS C

En tenant compte que  $i^2 = -1$ . Pour faciliter la manipulation des calculs dans C, il vaut mieux utiliser la forme algébrique ou la forme polaire d'un nombre complexe.

### a) Egalité de deux nombres complexes

Deux nombres complexes sont égaux s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaires.

$$a + ib = a' + ib' \text{ si } a = a' \text{ et } b = b'$$

Si on utilise la polaire d'un nombre complexe :

$$[|z| ; \theta] = [|z'| ; \theta'] \quad \text{si} \quad |z| = |z'| \text{ et } \theta = \theta'$$

### b) Addition et soustraction des nombres complexes

Dans C, on définit l'addition noté (+) par :

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

Ainsi que la soustraction noté (-) par :

$$(a + ib) - (a' + ib') = (a - a') + i(b - b')$$

L'utilisation de la forme polaire pour l'addition et la soustraction des nombres complexes n'est pas conseillée.

c) *Multiplication des deux nombres complexes*

Dans C, on définit la multiplication par :

$$(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

L'utilisation de la forme exponentielle. On a :  $z \cdot z' = (|z| \cdot |z'|) \cdot e^{j(\theta + \theta')}$

Sous la forme trigonométrique :  $z' z = |z| \cdot |z'| \cdot [\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')]$

Et sous la forme polaire on a :  $z' z = [|z| \cdot |z'|; (\theta + \theta')]$

d) *Divisions de deux nombres complexes*

Pour effectuer la division de deux nombres complexes, dans ses formes algébriques, il faut rendre réel le dénominateur. Pour ce dernier, on multiplie par le conjugué du dénominateur le numérateur et le dénominateur.

$$\frac{a' + ib'}{a + ib} = \frac{a' + ib'}{a + ib} \times \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{(a' + ib')(a - ib)}{a^2 + b^2}$$

En utilisant la forme exponentielle :  $\frac{z}{z'} = \frac{|z|}{|z'|} e^{j(\theta - \theta')}$

Sous la forme trigonométrique  $\cdot \frac{z}{z'} = \frac{|z|}{|z'|} \cdot [\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')]$

Et sous la forme polaire on a :  $\frac{z}{z'} = \left[ \frac{|z|}{|z'|}; (\theta - \theta') \right]$

### *Exercices chapitre I*

**I.1-**Ecrire sous la forme  $x+iy$  :

- a)  $(3 + 5i) + (2 - 3i)$
- b)  $(2 - 7i)(3 + 4i)$
- c)  $\frac{3}{1+i}$
- d)  $\frac{i-4}{2i-3}$
- e)  $\frac{1}{i^3}$
- f)  $i(1 - i)^2(1 + i).$

**I.2-** Ecrivez les nombres suivants sous la forme  $[|z|; \theta]$  :

- a)  $7+2i$
- b)  $3-i$
- c)  $-4+6i$
- d)  $-\sqrt{3} - i$

**I.3-**Écrivez sous la forme polaire exponentielle :

- a)  $\frac{1}{2+2i}$
- b)  $-1 + i\sqrt{3}$
- c)  $\sqrt{1+i}$
- d)  $\frac{1}{i^3}.$

**I.4** -Résoudre chacune des équations suivantes pour le nombre complexe

- a)  $4 + 5i = z - (1 - i)$
- b)  $(1 + 2i)z = 2 + 5i$  .

**I.5** - Simplifiez

- a)  $\frac{1+i}{1-i} - (1 + 2i)(2 + 2i) + \frac{3-i}{1+i}$
- b)  $2i(i - 1) + (\overline{\sqrt{3} + i})^3 + (1 + i)(\overline{1 + i})$

**I.6-** Représenter les nombres complexes suivants sur un plan vectoriel complexe :

- a)  $3+2i$
- b)  $4-5i$
- c)  $-2-2i$

**I.7-** les points A, B, C et D représentés par les nombres complexes  $z_1, z_2, z_3, z_4$  et O est l'origine

- a) Si OABC est un parallélépipède, et  $z_1= 1+ i$ ,  $z_2= 4+5i$ , trouvez  $z_3$ .

## Solution Des Exercices Chapitre I

### S.I.1

- a)  $(3 + 5i) + (2 - 3i) = 3 + 2 + (5 - 3)i = 5 + 2i$
- b)  $(2 - 7i)(3 + 4i) = (2)(3) - (7i)(3) - (2)(4i) - (7i)(4i) = 6 - 21i - (-28) = 6 - 21i + 8i + 28 = 34 - 13i$
- c)  $\frac{3}{1+i} = \frac{3}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{3(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-3i}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$
- d)  $\frac{i-4}{2i-3} = \frac{i-4}{2i-3} \times \frac{2i+3}{2i+3} = \frac{2i^2-8i+3i-12}{4i^2-9} = \frac{-14-5i}{-13} = \frac{14+5i}{13} = \frac{14}{13} + \frac{5}{13}i.$
- e)  $\frac{1}{i^3} = \frac{1}{i^2} \times \frac{1}{i} = -1 \times \frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = -1 \times \frac{i}{i^2} = -1 \times \frac{i}{-1} = i$
- f)  $i(1 - i)^2(1 + i) = i(1 + i)(1 + i)^2 = (i + i^2)(1 + i)^2 = (i - 1)(1 + i)^2 = (1 + i)(i^2 - 1^2) = (1 + i)(-1 - 1) = (1 + i)(-2) = -2i - 2$

### S.I.2

a)  $\underline{z_1} = 7 + 2i$   
 $|\underline{z_1}| = \sqrt{7^2 + 2^2} = 7.28$   
 $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = 15.94^\circ \Rightarrow \frac{15.94 * \pi}{180} = 0.088\pi \text{ rd}$   
 $\underline{z_1} = [7.28, 0.088\pi] =$

b)  $\underline{z_2} = 3 - i$   
 $|\underline{z_2}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = 3.16$   
 $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right) = 18.26^\circ \Rightarrow \frac{18.26 * \pi}{180} = 0.10\pi \text{ rd.}$   
 $\underline{z_2} = [3.16, 0.1\pi]$

c)  $\underline{z_3} = -4 + 6i$   
 $|\underline{z_3}| = \sqrt{4^2 + 6^2} = 7.21$   
 $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{6}{-4}\right) = -56.3^\circ \Rightarrow \frac{-56.3 * \pi}{180} = 0.312\pi \text{ rd.}$   
 $\underline{z_3} = [7.21, 0.312\pi]$

d)  $\underline{z_4} = -\sqrt{3} - i$   
 $|\underline{z_4}| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$   
 $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right) = 30^\circ \Rightarrow \frac{30 * \pi}{180} = \frac{\pi}{6} \text{ rd.}$   
 $\underline{z_4} = [2, \frac{\pi}{6}]$

### S.I.3

a)  $\frac{1}{2+2i} = \frac{1}{(2+2i)} \times \frac{(2-2i)}{(2-2i)} = \frac{2-2i}{4+4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$

et  $|z| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

et  $|z| = \tan^{-1} \frac{\frac{-1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{-\pi}{4}$

Alors  $\frac{1}{1+2i}$  s'écrit en écriture polaire :  $\frac{1}{4}\sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) \right) = \frac{1}{4}\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$

b)  $-1 + i\sqrt{3}$

$|z| = \sqrt{1+3}=2$ . en utilisant arctang nous trouvons  $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ .

si  $-1 + i\sqrt{3} = 2 \left( \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ .

c) Pour  $1+i$  le module est de  $\sqrt{2}$  et argument est  $\frac{\pi}{4}$

$$(1+i)^{1/2} = \left( \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right).$$

$$\frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{-1}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{-i}{-1} = i$$

et  $|z| = \sqrt{0+1} = 1$

et  $|z| = \frac{\pi}{2}$

Alors  $\frac{1}{i^3}$  s'écrit en écriture polaire :  $1 \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = 1e^{i\frac{\pi}{2}}$

### S.4

a)  $4 + 5i = z - (1 - i)$

En écrivant  $z = x - iy$

$$4 + 5i = (x + iy) - (1 - i)$$

$$4 + 5i = (x - 1) + (y + 1)i$$

On compare la partie réelle  $\Rightarrow 4 = x - 1 \Rightarrow x = 5$

On compare la partie imaginaire  $\Rightarrow 5 = (y + 1) \Rightarrow y = 4$

Donc  $z = 5 + 4i$ . en fait il n'y a aucun acte pour introduire la partie réelle et imaginaire de  $z$  puisque

b)  $4 + 5i = z - (1 - i)$

$$\Rightarrow z = 4 + 5i + (1 - i)$$

$$\Rightarrow z = 5 + 4i$$

c)  $(1 + 2i)z = 2 + 5i$

$$z = \frac{2 + 5i}{1 + 2i}$$

$$z = \frac{2 + 5i}{1 + 2i} \times \frac{1 - 2i}{1 - 2i}$$

$$z = \frac{12 + i}{5} = \frac{12}{5} + \frac{1}{5}i$$

### S.I.5

d) On calcule

$$\begin{aligned} \frac{1+i}{1-i} - (1+2i)(2+2i) + \frac{(3-i)}{(1+i)} &= \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} - (1+2i)(2+2i) + \frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= i - 2 - 2i - 4i + \frac{3-1-3i-i}{2} = i + 2 - 6i + \frac{2-4i}{2} = 2 - 5i + 1 - 2i = 3 - 7i \end{aligned}$$

e) Depuis

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + i)^3 &= (\sqrt{3} - i)^3 = (\sqrt{3} - i)^2(\sqrt{3} - i) = (3 - 1 - 2i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i) \\ &= (2 - 2i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i) = 2\sqrt{3} - 2i - 6i - 2\sqrt{3} = -8i \end{aligned}$$

On obtient :

$$2i(i-1) + (\sqrt{3} + 1)^3 + (1+i)(\overline{1+i}) = -2 - 2i - 8i + 2 = -10i$$

### S.I.6

$Z_1, Z_2, Z_3$  sont représentés dans le diagramme ci dessous

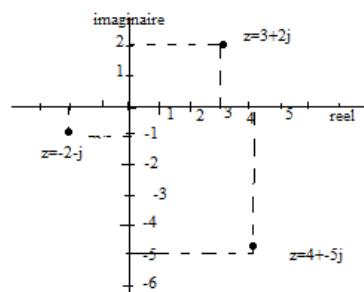


Figure I.6 Diagramme représentatif des grandeurs complexes.

### S.I.7

a) OABC est un parallélogramme

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} \text{ ou } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$$

$$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{OC}}$$

$$z_B - z_A = z_C - z_O$$

$$(4 + 5j) - (1 + j) = z_C - (0 + 0j)$$

$$3 + 4j = z_C$$

Chapitre II

***Analyse des circuits en régime permanent***

## II- ANALYSE DES CIRCUITS EN REGIME MONOPHASÉ

Un circuit est dit fonctionnel au régime sinusoïdal si chaque source d'excitation est sinusoïdale.

### II.1. ANALYSE CIRCUIT EN REGIME MONOPHASÉ

#### a) Forme d'onde sinusoïdale

On résume autour de la figure II.1 les caractéristiques d'une grandeur sinusoïdale

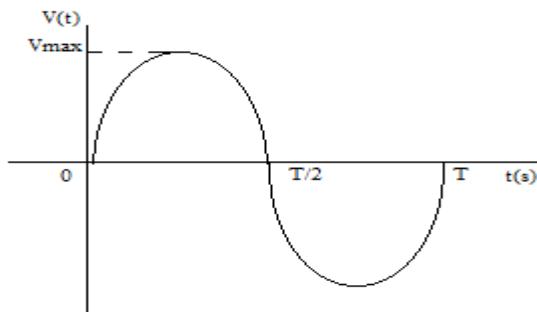


Figure II.1 Caractéristiques des grandeurs sinusoïdales.

Soit  $V(t)$ , une onde sinusoïdale :

$$V(t) = V_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

- $V_{max}$  = Amplitude maximale (V)
- $\omega_0$  = pulsation (rad /s)
- $\varphi$  = Phase initiale
- Fréquence  $\Rightarrow f = \omega_0/2\pi$  (Hz)
- Période  $\Rightarrow T = 1/f$  (s)

#### b) Valeur efficace :

$$V_{eff} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$$

#### c) Notion d'impédance

Les impédances complexes sont des nombres complexes. Classiquement, si  $\underline{Z} = R + jX$ , R représente la résistance série de l'impédance et X sa réactance série.

La notion d'impédance est très importante puisqu'elle reflète une proportionnalité entre les courants et les tensions et non plus une relation différentielle. On retiendra :

Le terme  $\underline{Z} = \frac{U}{I}$  représente « l'impédance complexe » Z

$$Z = |\underline{Z}| \text{ en Ohms } (\Omega)$$

d) Notion admittance

Admittance d'un dipôle     $\underline{Y} = \frac{1}{Z} = \frac{i}{U}$     et     $Y = |\underline{Y}|$  en siemens ('S)

De même si     $\underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jX}$ . R représente la résistance de l'impédance et X sa réactance parallèle.

Les impédances complexes bénéficient des règles d'associations classiques des résistances.

On retiendra les associations mises en évidence sur la figure II.2

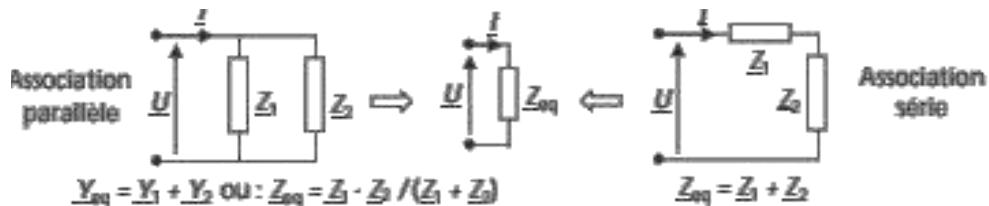
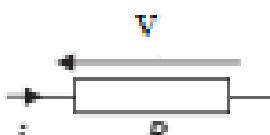
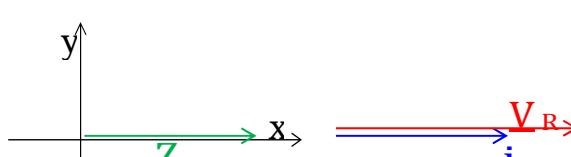
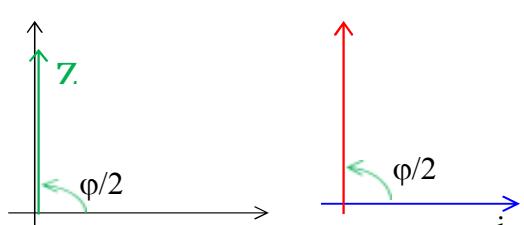
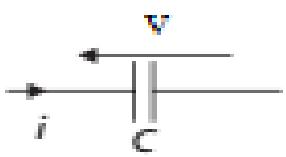
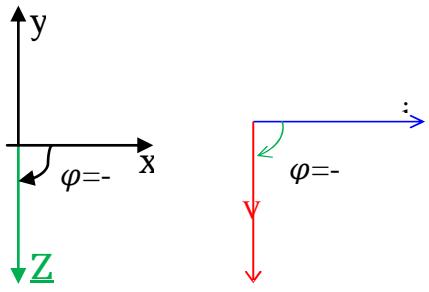


Figure II.2 Règles d'association des impédances.

## II.2. TRANSFORMATION DANS LE DOMAINE DE PHASE DES COMPOSANTS PASSIFS (R.L.C.)

Temps	Phase
<p><b>Resistance</b></p> <p>Si      <math>v(t) = Ri(t)</math> alors     <math>i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)</math>               <math>v(t) = RI_m \cos(\omega t + \phi)</math></p> 	$I = I_m e^{j\phi} = [I_m ; \phi]$ $v = RI_m e^{j\phi} = [RI_m ; \phi]$ $Z_R = V/I$ $\underline{Z}_R = R$ <p>Diagramme de Fresnel associé à une résistance R</p> 
<p><b>Inductance</b></p> <p>Si      <math>v_L(t) = Ldi/dt</math> Alors    <math>i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)</math>               <math>v_L(t) = L\omega I_m \cos(\omega t + \phi + \pi/2)</math></p>	$I = I_m e^{j\phi} = [I_m ; \phi]$ $v_L = [L\omega I_m ; \phi + \pi/2]$ $\underline{Z}_L = [L\omega ; (\pi/2)]$ $\underline{Z}_L = j(L\omega)$ <p>Diagramme de Fresnel associé à une inductance</p>

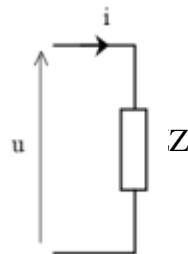
	
<p><b>Condensateur</b></p> $i_c(t) = CdV/dt$ $\text{Si } v_c(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$ $\text{alors } i(t) = C\omega V_m \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$ 	$V = [V_m; \varphi]$ $I = [C\omega V_m; (\varphi + \pi/2)]$ $\underline{Z}_C = [1/C\omega; -\pi/2]$ $\underline{Z}_C = -j(1/C\omega)$ <p>Diagramme de Fresnel associé à une capacité C</p> 

### a) Procédure

1. Transformer le circuit dans le domaine de phase. (RLC)  $\rightarrow$  ( $Z_R, Z_L, Z_C$ )
2. Etudier le circuit dans le domaine de phase en utilisant les théorèmes relatifs aux circuits électriques.

### II.3. PUISSANCES EN REGIME MONOPHASÉ

Avec la convention de signe récepteur si la puissance est positive alors le système considéré reçoit de l'énergie, si la puissance est négative alors il cède de l'énergie



**a)** *Puissance instantanée.*

$$p = u \cdot i \quad (\text{watt} - \text{W})$$

**b)** *Puissance active (puissance moyenne).*

La puissance active est la valeur moyenne de la puissance instantanée ; dans le cas de grandeurs périodiques de période T

$$P = \langle p \rangle = \frac{1}{T} \cdot \int_T p dt \quad (\text{watt-W})$$

Dans le cas d'un courant et d'une tension sinusoïdale :

$$u(t) = U\sqrt{2} \cos \omega t \text{ et } i(t) = I\sqrt{2} \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

Après développement on trouve :

$$p(t) = UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \varphi)$$

D'où La puissance active en régime sinusoïdal monophasé

$$P = UI \cos \varphi$$

**c)** *Puissance apparente.*

On définit la puissance apparente par :

$$S = UI \quad (\text{volt-ampère} - \text{VA})$$

Ce qui permet d'introduire le facteur de puissance :

$$k = P / S \quad (\text{sans unité})$$

En régime sinusoïdal on trouve donc  $k = \cos \varphi$

**d)** *Puissance réactive en régime sinusoïdal.*

$$\mathbf{Q} = \mathbf{U}\mathbf{I} \cdot \sin\varphi \quad (\text{volt-ampère réactifs - VAR})$$

On peut alors écrire  $Q = \sqrt{S^2 - P^2}$

et un certain nombre de relations utiles lors des résolutions d'exercices :

$$\tan \varphi = \frac{Q}{P}, \cos \varphi = \frac{P}{S}, \sin \varphi = \frac{Q}{S}$$

### e) Théorème de Boucherot.

On considère l'association de  $k$  dipôles, qu'ils soient placés en série, en parallèle ou en toute combinaison série-parallèle possible, on a :

$$P = \sum_k P_k \quad Q = \sum_k Q_k \quad S = \sum_k S_k$$

Avec  $P$ ,  $Q$  et  $S$  les puissances actives, réactives et apparentes de l'ensemble et  $P_k$ ,  $Q_k$  et  $S_k$  celles associées à chacun des dipôles.

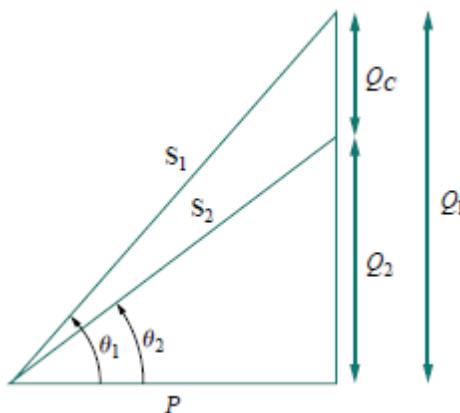
### f) Puissance complexe.

On définit également une puissance complexe  $\underline{P} = \underline{U} \cdot \underline{I} = P + jQ$

### g) Correction du facteur de puissance

Si la charge inductive d'origine a une puissance apparente, alors :

$$P = S_1 \cos \theta_1 \text{ et } Q_1 = S_1 \sin \theta_1 = P \tan \theta_1$$



Si nous souhaitons augmenter le facteur de puissance de à sans toucher à la puissance active, alors la nouvelle puissance réactive est :

$$Q_2 = P \tan \theta_2$$

La réduction de la puissance réactive est causée par le condensateur shunt, soit :

$$Q_C = Q_1 - Q_2 = P(\tan \theta_1 - \tan \theta_2)$$

$$Q_C = \frac{V^2}{X_C} = \omega C V^2 \rightarrow C = \frac{Q_C}{\omega V^2} = \frac{P(\tan \theta_1 - \tan \theta_2)}{\omega V^2}$$

## Exercices chapitre II

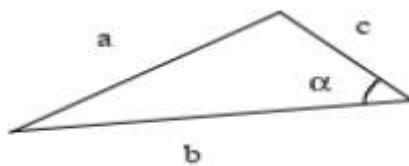
<p><b>II.1-</b> On a le circuit RL suivant , avec <math>v(t) = V_m \cos(\omega_0 t + \phi)</math> ; <math>i(t) = ?</math></p>	
<p><b>II.2-</b> Soit un circuit RLC ou <math>v_s(t) = 240 \cos(\omega_0 t)</math>, opérant à 60Hz. Calculer :</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>I_s</math></li> <li>2. <math>V_L, V_C</math></li> <li>3. <math>I_R, I_C</math></li> </ol>	
<p><b>II.3</b> <math>i_1(t) = 4\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)</math> ;  <math>i_2(t) = 2\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right)</math></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Déterminer : <math>i_3(t)</math> par la méthode des vecteurs et par la méthode des nombres complexes.</li> <li>2. Calculer : <math>\varphi_{i1/i2}</math>; <math>\varphi_{i2/i3}</math>; <math>\varphi_{i1/i3}</math>;</li> </ol>	
<p><b>II.4</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. représentation Fresnel :</li> <li>1.1 Construire <math>\vec{U}_R</math> . <math>\vec{U}_C</math> <math>\vec{U}</math>.</li> <li>1.2 En déduire l'expression de <math>Z_{eq}</math> .</li> <li>1.3 l'expression du déphasage <math>\phi</math> de <math>U</math> par rapport à <math>i</math> .</li> <li>1.4 Quelle plage peut rendre le déphasage</li> <li>2. Utilisation des nombres complexes</li> <li>2.1 déterminer <math>Z_{eq}</math></li> <li>2.2 En déduire <math>Z_{eq}</math> Et <math>\Phi</math></li> <li>3. Application numérique :</li> </ol> <p>On donne <math>U=5V</math> ; <math>f=10KHz</math> ; <math>R=1K\Omega</math> et <math>C=10nF</math>.      Calculer <math>I</math>, <math>\phi</math>, <math>U_R</math> et <math>U_C</math> commentaires ?      Pour quelle fréquence a ton <math>U_C=U_R</math> ?</p>	
<p><b>II.5</b></p> <p>Une bobine réelle est équivalente à une résistance <math>R</math> en série avec une inductance <math>L</math>. On la branche en série avec une résistance <math>r = 8\Omega</math>.      On donne <math>f=50Hz</math>, <math>U=14V</math>, <math>U_B = 8V</math> et <math>U_r = 8V</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Calculer <math>I</math>.</li> <li>2. Construction de Fresnel</li> </ol>	

2.1 Construire  $\vec{U}_r$ ,  $\vec{U}_B$  et  $\vec{U}$ . Calculer  $\varphi_{U_r/i}$  et  $\varphi_{U_B/i}$ .

2.2 a partir de  $\vec{U}_B$  construire  $\vec{U}_R$  et  $\vec{U}_L$  en déduire R et L.

NB.pour un triangle quelconque

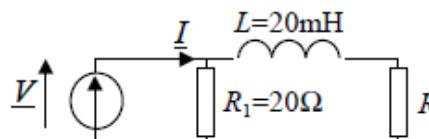
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$



## II.6

On considère la charge monophasée représentée sur la figure ci-dessous, placée sous une tension sinusoïdale de valeur efficace  $V=230$  V et de fréquence 50 Hz.

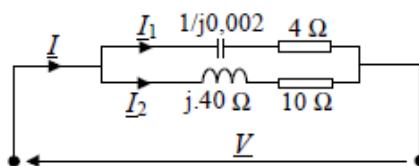
- 1) Calculer la valeur efficace  $I_1$  du courant circulant dans la résistance  $R_1$ .
- 2) Calculer la valeur efficace  $I_2$  du courant circulant dans la résistance  $R_2$ .
- 3) Calculer la valeur efficace  $I$  du courant absorbé par l'ensemble de ce circuit.
- 4) Calculer la valeur des puissances active P, réactive Q et apparente S relatives à ce circuit.
- 5) En déduire la valeur du facteur de puissance de cette charge



## II.7 ,

Du circuit représenté ci-contre, on ne connaît que la valeur du courant total absorbé :  $I=2,5$  A ainsi que les valeurs des impédances notées sur la figure.

- 1) Calculer la valeur de la tension efficace  $V$  appliquée à cette charge.
- 2) En déduire les valeurs de  $I_1$  et  $I_2$ .
- 3) Retrouver ces valeurs par l'application de la formule du diviseur de courant (les admittances seront directement calculées à la calculatrice en calcul complexe).
- 4) Représenter l'intégralité des grandeurs sur un diagramme de Fresnel.
- 5) Ecrire l'expression littérale de la puissance active  $P$  et de la puissance réactive  $Q$  consommées par cette charge. Faire l'application numérique.
- 6) Calculer les éléments du circuit le plus simple équivalent à cette charge

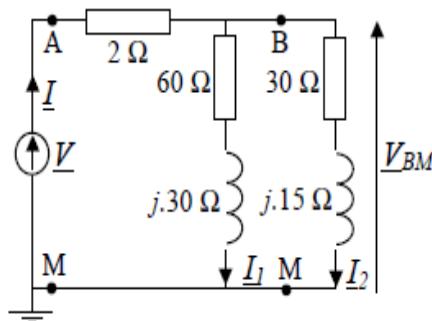


**II8** Dans cet exercice, on s'intéresse à la détermination des grandeurs électriques relatives au récepteur monophasé représenté sur la figure ci contre.

Le générateur est une source de tension sinusoïdale idéale. La grandeur complexe  $V$  représente ainsi une tension sinusoïdale de valeur efficace  $V=130$  V et de fréquence  $f=50$

Hz .

- 1) Calculer la valeur numérique de l'impédance complexe  $Z_{BM}$  équivalente aux deux branches de sommets B et M.
- 2) Calculer alors l'impédance complexe AM Z équivalente à l'ensemble de la charge.
- 3) Calculer la valeur efficace du courant I .
- 4) Calculer ainsi les valeurs de la puissance active et réactive totales consommées par le circuit. NB : Ce calcul peut être mené de plusieurs manières différentes. Toutes les démarches seront acceptées à condition que le résultat soit juste.
- 5) Calculer le facteur de puissance global de ce récepteur (préciser si le déphasage est « arrière » ou « avant »)).
- 6) En utilisant les question 1 et 3, calculer également la valeur efficace de la tension  $V_{BM}$
- 7) En déduire les valeurs de  $I_1$  et  $I_2$  .
- 8) Peut on dire de façon générale que  $I=I_1+I_2$  ? Cette égalité est elle vérifiée ici ? Pourquoi ?
- 9) Ecrire l'équation de maille qui relie V, I et  $V_{BM}$  .
- 10) 16) Représenter alors sur un diagramme de Fresnel sans échelle particulière les vecteurs  $V$ ,  $I$ ,  $V_{BM}$ ,  $I_1$  et  $I_2$  .



**II.9** Un atelier monophasé est constitué de trois ensembles de machines, constituant les charges 1, 2 et 3, mises en parallèle sur la même tension sinusoïdale à 50 Hz de valeur efficace  $V=230$  V. On récapitule dans le tableau ci dessous les mesures faites sur chacune de ces charges

Charge 1	Charge 2	$S_2=45\text{kVA}$
$P_1=20\text{kW}$	$\cos\phi_2=0,6\text{AR}$	Charge 3
$Q_1=15\text{kVAR}$	$S_3=10\text{kVA}$	$Q_3=-5 \text{ kVAR}$

- 1) Calculer pour chaque charge l'ensemble des grandeurs électriques la caractérisant : courant absorbé , puissances actives réactives et apparente, facteur de puissance. On notera ces grandeurs  $I_1, I_2, I_3, P_1, P_2$ , etc.
- 2) En déduire la valeur de la puissance active totale  $P$  et de la puissance réactive totale  $Q$  consommées par la charge totale. calculer également la puissance apparente totale  $S$ , le facteur de puissance global ainsi que le courant total absorbé :  $I$ .
- 3) Représenter dans le plan complexe les courants  $I_1, I_2, I_3$  et  $I$ . On réalisera un diagramme sans échelle mais sur lequel les amplitudes et déphasages des vecteurs seront notés. On prendra comme référence de phase la tension  $V$ .
- 4) Représenter la construction du triangle des puissances de l'ensemble de ces charges.
- 5) On désire, en plaçant un condensateur C'en parallèle sur l'installation relever le facteur de puissance à la valeur :  $\cos\varphi'=0,9 \text{ AR}$  . Calculer la valeur de  $C'$ .
- 6) Calculer également la valeur  $C''$  d'un condensateur permettant d'obtenir un facteur de puissance  $\cos\varphi''=0,9 \text{ AV}$ .
- 7) Le facteur de puissance ayant la même valeur dans les deux cas, quel condensateur choisit on en pratique ?

## Solution ion Des Exercices Chapitre 2

### S.II.1

L'équation de ce circuit est :

$$V_m|\Phi = RI + jL\omega_0 I$$

On fait sortir I ,

$$I = \frac{V_m|\Phi}{R + jL\omega_0}$$

$$I = \frac{V}{Z}$$

Avec :

$$\underline{V} = V_m|\Phi \text{ et } \underline{Z} = Z|\theta = \sqrt{R^2 + (L\omega_0)^2} \left[ \tan^{-1} \frac{L\omega_0}{R} \right]$$

$$I = \frac{V_m|\Phi}{\sqrt{R^2 + (L\omega_0)^2} \left[ \tan^{-1} \frac{L\omega_0}{R} \right] |\theta|} = \frac{V_m|\Phi}{(\sqrt{R^2 + (L\omega_0)^2}) |\theta|}$$

$$I = \frac{V_m|\Phi - \theta|}{\sqrt{R^2 + (L\omega_0)^2}}$$

Alors dans le domaine du temps,

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega_0)^2}} \cos(\omega_0 t + \Phi - \theta)$$

### S.II.2

On convertit en impédances  $\underline{Z_L}$  et  $\underline{Z_C}$

$$\underline{Z_L} = 37.7 j \Omega ; \quad \underline{Z_C} = -33.16 j \Omega$$

calcul de l'impédance équivalente du circuit

$$Z_L + (Z_R // Z_C) = 21.18 \angle 43.85^\circ$$

Calcul des valeurs demandées :

$$I_S = \frac{V_S}{Z_{eq}} = \frac{240|0}{21.18|43.85} = 11.33|-43.85 A$$

$$V_L = I_S \cdot Z_L = 427|46.16^\circ V$$

$$V_C = V_R = V_S - V_L = 313.18|-100.3^\circ V$$

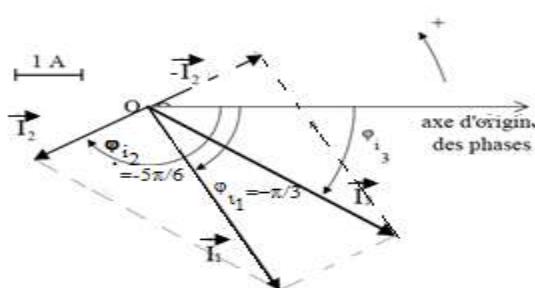
$$I_R = \frac{V_R}{R} = 6.2|-100.30^\circ A$$

$$I_C = \frac{V_C}{Z_C} = 9.44|-10^\circ A$$

### S.II.3

- vecteurs Fresnel Loi des nœuds :  $\vec{I}_3 = \vec{I}_1 - \vec{I}_2$

Graphiquement



$$I_3 = 4.5 \text{ A}$$

$$\varphi_{i_3} = -33^\circ \approx -0.58 \text{ rad}$$

D'où  $i_3(t) \approx 4.5\sqrt{2} \sin(\omega t - 0.58)$

Finalement  $i_3(t) \approx 4.472\sqrt{2} \sin(\omega t - 0.584)$

$$\varphi_{i_1} = -\frac{\pi}{3} - \left(\frac{-5\pi}{6}\right) = +\frac{\pi}{2} = +90^\circ : i_1 \text{ est en quadrature avance sur } i_2$$

$$\varphi_{i_2} = -\frac{5\pi}{6} - (-0.584) = -2.034 \text{ rad} = -116^\circ$$

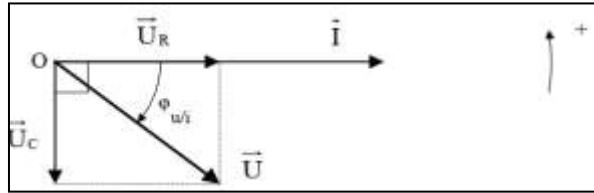
$$\varphi_{i_1} = \varphi_{i_1} + \varphi_{i_2} = -0.463 \text{ rad} = -26^\circ$$

-Nombres complexes

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = \left(4, -\frac{\pi}{3}\right) - \left(2, -\frac{5\pi}{6}\right) = (2 - 2\sqrt{3}j) - \sqrt{3} - j = 2 + \sqrt{3} + (1 - 23j) = 4.472; -0.584 \text{ rad}$$

#### S.II.4

1)  $\vec{U} = \vec{U}_C + \vec{U}_R$



Par définition  $Z_{eq} = \frac{U}{I}$

Théorème de Pythagore :  $U^2 = U_R^2 + U_C^2$

Avec  $U_R = R * I$  et  $U_C = \frac{1}{C\omega} * I$

D'où  $Z_{eq}^2 = \frac{U^2}{I^2} = R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2$

Finalement  $Z_{eq} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}$

$$\tan \varphi = -\frac{U_C}{U_R} = -\frac{1}{RC\omega}$$

Soit  $\varphi = -\tan^{-1} \frac{1}{RC\omega}$

Le déphasage est compris entre  $-90^\circ$  et  $0^\circ$

2)  $\underline{Z} = R - \frac{j}{C\omega}$

$$Z_{eq} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\tan \varphi = -\frac{1}{RC\omega} \text{ d'où } \varphi = -\tan^{-1} \frac{1}{RC\omega}$$

3) loi d'Homs :  $I = \frac{U}{Z_{eq}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}} = 2.66mA$

$$\varphi = -\tan^{-1} \frac{1}{RC\omega} = -58^\circ = -1.01 \text{ rad}$$

$$U_R = 2.66V$$

$$U_C = \frac{1}{C\omega} * I = 4.23V$$

On remarque que  $U \neq U_R + U_C$

Les valeurs

efficaces ne s'additionnent pas sauf cas particulier

$$U_R = U_C \Rightarrow RI = \frac{1}{C\omega} \text{ soit } RC\omega = 1$$

$$f = \frac{1}{2\pi RC} = 15.9 \text{ kHz.}$$

### S.II.5

1) Loi d'hom :  $U_r = r * I$

$$\text{AN } I=1A$$

Construction Fresnel

$$\text{a) } U = \overrightarrow{U_r} + \overrightarrow{U_B}$$

Dans le triangle délimité par les trois vecteurs

$$U_B^2 = U^2 + U_r^2 - 2UU_r \cos \varphi_{\frac{U}{I}}$$

$$\cos \varphi_{\frac{U}{I}} = \frac{U^2 + U_r^2 - U_B^2}{2UU_r} = 0.875$$

$$\varphi_{\frac{U}{I}} = +29^\circ$$

Pour des raisons de symétrie

$$\varphi_{\frac{U_B}{I}} = 2 \varphi_{\frac{U}{I}} = +58^\circ$$

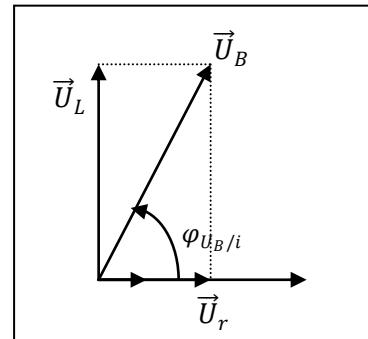
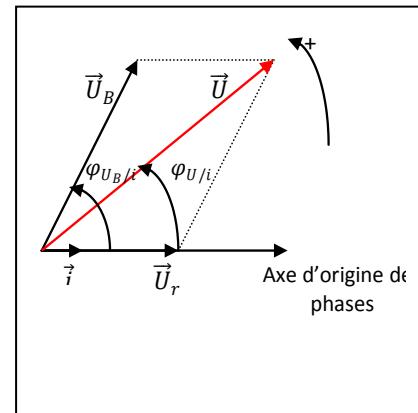
$$\text{b) } U_B = \overrightarrow{U_R} + \overrightarrow{U_L}$$

$$U_R = U_B \cos \varphi_{\frac{U_B}{I}} = 4.25V$$

$$R = \frac{U_R}{I} = 4.25\Omega$$

$$U_L = U_B \sin \varphi_{\frac{U_B}{I}} = 6.78 V$$

$$L = \frac{U_L}{\omega I} = 21.6mH$$



### S II.6

$$1) I_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{230}{20} = 11.5 A$$

$$2) I_2 = \frac{V}{\sqrt{R_1^2 + (L\omega_0)^2}} = 19.5 A$$

3) Impossible ici d'ajouter les valeurs efficaces calculées. Il est nécessaire de calculer l'impédance équivalente :

$$R_1 // (R_2 + jL\omega) = \frac{20 \cdot j(20 \cdot 10^{-3} \times 100\pi)}{(20 + 10) + j(20 \cdot 10^{-3} \times 100\pi)} = \frac{200 + j125.6}{30 + j6.28}$$

$$4) \text{ On en deduit : } I = \frac{V}{R_1 // (R_2 + jL\omega)} = \frac{230}{\frac{\sqrt{200^2 + (125.6)^2}}{\sqrt{30^2 + (6.28)^2}}} = 29.85 A$$

$$5) P = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = 20 \times 11.5^2 + 10 \times 19.5^2 = 6.44KW$$

$$6) Q = L\omega I_2^2 = 20 \times 10^{-3} \times 100\pi \times 19.5^2 = 2.39KVAR \text{ d'où } S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 6.86 KVA.$$

$$7) \cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}} = 0.93.$$

### S.II.7

1) On calcule par exemple l'impédance équivalente au circuit :

2)

$$Z_{eq} = \frac{\left(4 - j\left(\frac{1}{0.002}\right)\right) \times (40 + j10)}{\left(4 - j\left(\frac{1}{0.002}\right)\right) + (40 + j10)} = 11.8 + j43.2$$

ainsi :  $V = Z_{eq}I = \sqrt{11.8^2 + 43.2^2} \times 2.5 = 112V.$

3)  $I_1 = \frac{V}{\sqrt{4^2+500^2}} = 0.22A, \quad I_2 = \frac{V}{\sqrt{10^2+40^2}} = 2.7A.$

4) La formule du diviseur de courant donne bien sur le même résultat.

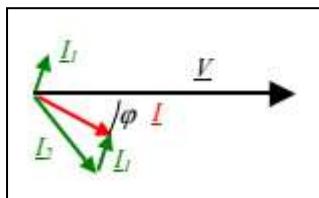
5) Voir schéma

6)  $P = 4I_1^2 + 10I_2^2 = 73W, Q = -500I_1^2 + 40I_2^2 = 267VAR.$

7) Cette charge est équivalente à un circuit R-L. ( $Q > 0$ ) dont

Les valeurs sont :

$$R = \frac{P}{I^2} = 11.7 \Omega \text{ et } X = L\omega = \frac{Q}{I^2} = 42.7 \Omega.$$



### S.II.8

1) Si de la première branche  $\underline{Z} = 30 + j15$ ,

et  $Z$  de la deuxième branche  $\underline{Z} = 60 + j30$ , on remarque que c'est le double de la première donc :

$$\underline{Z}_{BM} = \underline{Z} // 2\bar{Z} = Z_{BM} = \frac{\underline{Z} * 2Z}{\underline{Z} + 2Z} = \frac{2Z^2}{3Z} = \frac{2Z}{3} = 20 + j10$$

2)  $\underline{Z}_{AM} = Z_{BM} + 2 = 22 + j10$

3)  $I = \frac{V}{Z_{AM}} = \frac{130}{\sqrt{22^2+10^2}} = 5.38A$

4)  $P = 22I^2 = 636,7W$  et  $Q = 10I^2 = 289,4 VAR$

5)  $\cos \varphi = \frac{P}{S} = 0.91AR$

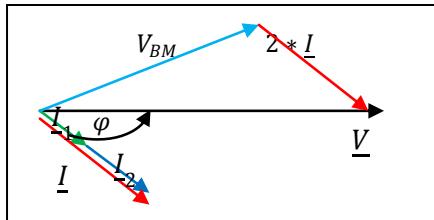
6)  $V_{BM} = Z_{BM} \cdot I = \sqrt{20^2 + 10^2} \times 5.38 = 120.3V$

7)  $I_1 = \frac{V_{BM}}{\sqrt{60^2+30^2}} = 1.79A$  et  $I_2 = \frac{V_{BM}}{\sqrt{30^2+15^2}} = 3.58A$

8) De façon générale il n'y a pas égalité, sauf qu'ici ça marche car les deux courants sont en phase

9)  $\underline{V} = 2\underline{I} + \underline{V}_{BM}$

10) Voir schéma ci contre.



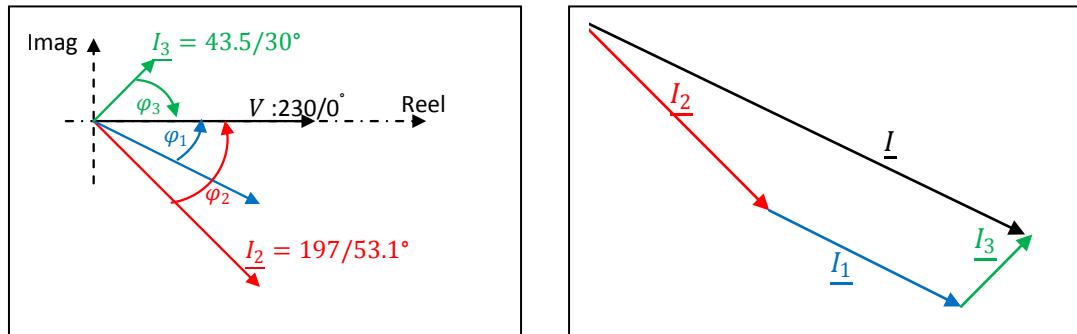
### S.II.9

- 1) On détaille dans le tableau ci-dessous l'ensemble des grandeurs électriques pour chaque charge, les valeurs données dans l'énoncé étant encadrées.

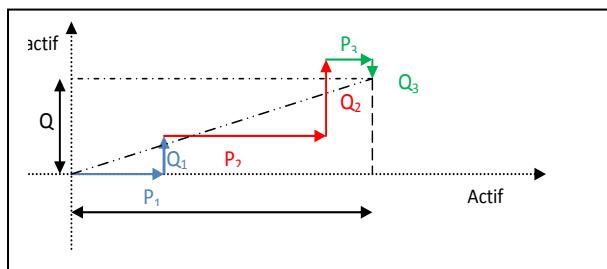
Charge 1	Charge2	Charge3
$P_1=20\text{KW}$ $Q_1=15\text{KVAR}$ $S_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2}=25\text{KVA}$ $I_1 = \frac{S_1}{V}=108,7\text{A}$ $\cos \varphi_1 = \frac{P_1}{S_1}=0.8\text{AR}$ car $Q>0 \Rightarrow \varphi_1=36.8^\circ$	$S_2= 45\text{KVA}$ $\cos \varphi_1=0.6\text{AR}$ $P_2=S_2 \cos \varphi_2 =27\text{KW}$ $Q_2 = S_2 \sin \varphi_2=36\text{KVAR}$ $I_2 = \frac{S_2}{V}=195.7\text{A}$	$S_3=10\text{KVA}$ $Q_3=-5\text{KVAR}$ $P_3 = \sqrt{S_3^2 - Q_3^2}=8.66\text{KW}$ $\cos \varphi_3 = \frac{P_3}{S_3}=0.86\text{AV}$ car $Q<0 \Rightarrow \varphi_3=-30.7^\circ$

2)  $P=P_1+P_2+P_3=55.66\text{KW}$        $Q=Q_1+Q_2+Q_3= 46\text{KVAR}$        $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$   
 $\cos \varphi = \frac{P}{S}=0.77$ ,  $I = \frac{S}{V}=314\text{A}$ .

- 3) On représente le tracé ci-dessous



- 4) Le triangle des puissances de l'ensemble de ces charges est représenté ci-dessous



- 5) Avant de placer le condensateur :  $Q=Q_1+Q_2+Q_3=P \tan. \varphi$ . Après avoir placé le condensateur  $C'$ ,  $\cos \varphi'' = 0,9 \text{ AR}$  d'où :  $Q=Q_1+Q_2+Q_3+Q_C = P \cdot \tan \varphi' = P \tan \varphi + Q_C$

- 6) On en déduit  $Q_C = -C\omega V^2 = P \tan \varphi' - P \tan \varphi$  d'où  $C = \frac{-P \tan \varphi' + P \tan \varphi}{\omega V^2} = 1.2mF.$
- 7) Si on désire un  $\cos \varphi$  arrière, le signe de la tangente de l'angle final change, on écrit donc :
- 8)  $C = \frac{-P(-\tan \varphi' + P \tan \varphi)}{\omega V^2} = 4.2mF.$
- 9) On choisit en pratique le condensateur de valeur la plus faible par économie et afin d'éviter un surdimensionnement inutile.

*Chapitre III*

***Régime triphasé***

### III- REGIME TRIPHASE

#### III-1 ANALYSE DES SYSTEMES TRIPHASES

Un système triphasé est un réseau à trois grandeurs (tensions ou courants) sinusoïdales de même fréquence et déphasées, les unes par rapport aux autres, d'un angle de  $120^\circ$  (voir Fig III.1). Le système est équilibré si les grandeurs sinusoïdales sont de même valeur efficace. Il est direct si les phases sont ordonnées dans le sens trigonométrique et inverse dans l'autre cas.

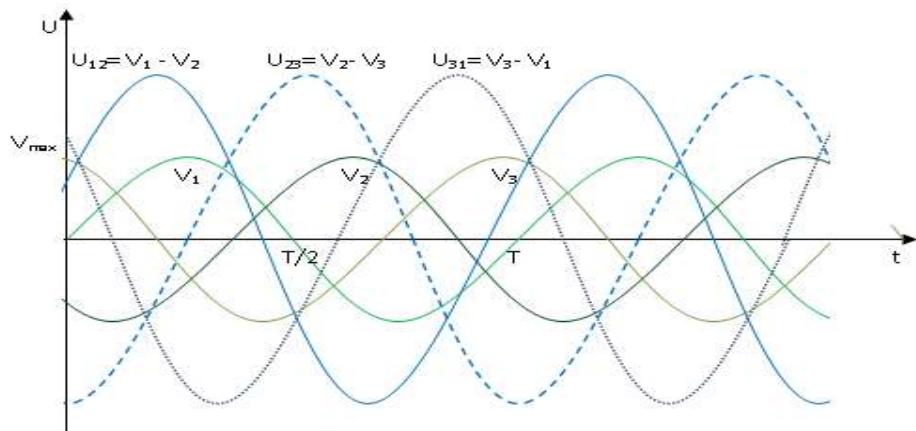


Figure III.1 Grandeurs tensions sinusoïdales composées et simples

Les tensions délivrées par les générateurs peuvent s'écrire de deux façons fig III.2 :

- Avec le neutre comme référence (les tensions sont dites "tensions simples"),
- Sans référence au neutre (les tensions sont dites "tensions composées").

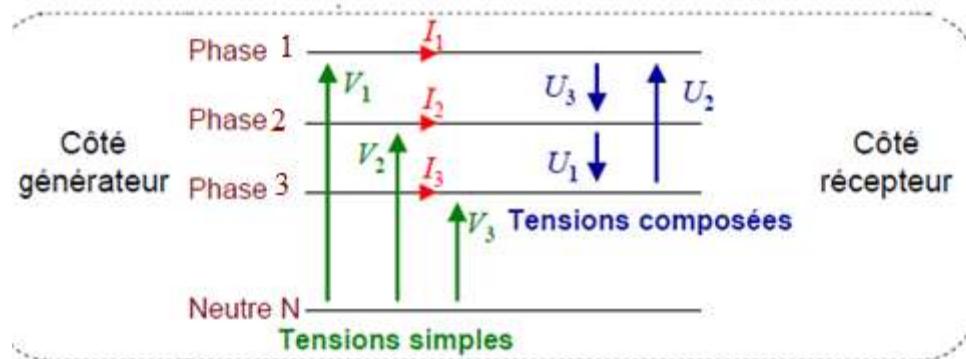


Figure III.2 Tensions composées et simples

### a) Tensions simples

Les tensions simples sont :

On définit la tension simple par la différence de potentiel entre une phase et le neutre (réel ou fictif). Les trois tensions simples ont la même valeur efficace V et la même pulsation  $\omega=2\pi f$ .

	$v_1(t) = V\sqrt{2}\sin(\omega t)$ : Référence de phase	$\overline{V_1} = [V, 0^\circ]$
	$v_2(t) = V\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{2\pi}{3})$	$\overline{V_2} = [V, -120^\circ]$
	$v_3(t) = V\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{4\pi}{3})$	$\overline{V_3} = [V, -240^\circ]$
Vecteurs de frenel associés	Écritures temporelles	Écriture polaire (complexe)

N.B : Le système est équilibré direct

- Equilibre car la construction de Fresnel montre que ;  $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{0}$
- Direct car un observateur immobile verrait les vecteurs défiler devant lui dans l'ordre 1, 2, 3.

### b) Tensions composées

La tension composée est la différence de potentiel entre deux phases. Les tensions composées ont la même valeur efficace U et la même pulsation  $\omega=2\pi f$  que les tensions simples.

	$u_{12}(t) = v_1(t) - v_2(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$	$\overline{U_{12}} = [V\sqrt{3}, +30^\circ]$
	$u_{23}(t) = v_2(t) - v_3(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$	$\overline{U_{23}} = [V\sqrt{3}, -90^\circ]$
	$u_{31}(t) = v_3(t) - v_1(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{7\pi}{6})$	$\overline{U_{31}} = [V\sqrt{3}, +150^\circ]$
Vecteurs de frenel associés	Écritures temporelles	Écriture polaire (complexe)

Si le réseau est équilibré :  $\overrightarrow{U_{12}} + \overrightarrow{U_{23}} + \overrightarrow{U_{31}} = \vec{0}$

Le système des trois tensions composées est équilibré direct.

c) *Relation entre U et V*

$$U = 2V \cos 30^\circ \rightarrow U = 2V \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow U = V\sqrt{3}$$

Cette relation est toujours vraie quelque soit la charge. Fig III.3

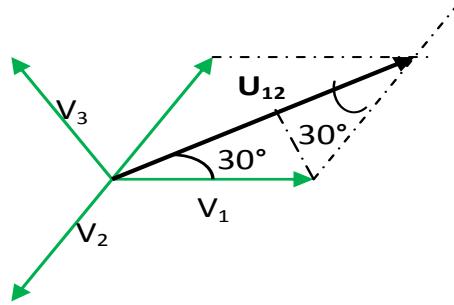


Figure III.3 Triangle des tensions

d) *Récepteurs triphasés équilibrés*

Récepteurs triphasés : ce sont des récepteurs constitués de trois dipôles identiques, d'impédance  $Z$ . (fig III.4)

Équilibre : car les trois éléments sont identiques.

Courants par phase : ce sont les courants qui traversent les éléments  $Z$  du récepteur triphasé.

Symbol :  $J$

Courants en ligne : ce sont les courants qui passent dans les fils du réseau triphasé. Symbole :

$I$

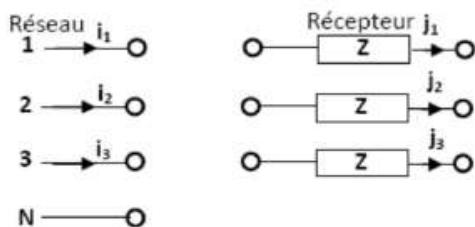
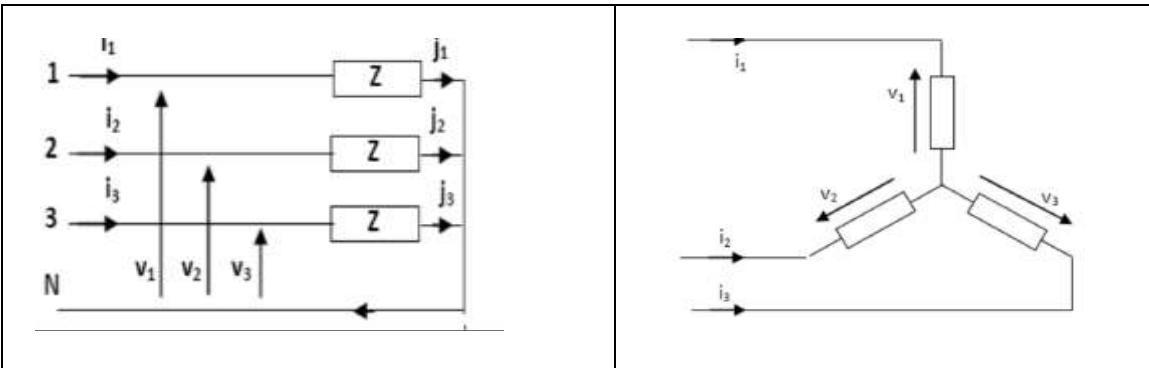


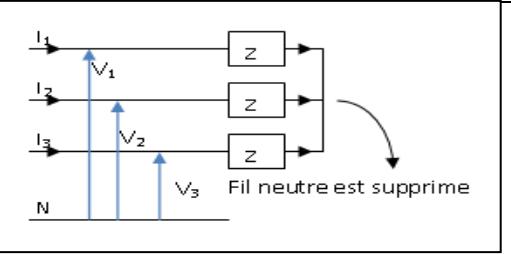
Figure III.4 Récepteurs triphasés

Le réseau et le récepteur peuvent se relier de deux façons différentes : en étoile ou en triangle.

e) *Couplage étoile*



Comme il s'agit des mêmes impédances :  $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ , donc  $i_N$ . Le courant dans le fil neutre est nul. Le fil neutre n'est donc pas nécessaire.  
Pour un système triphasé équilibré, le fil neutre ne sert à rien.

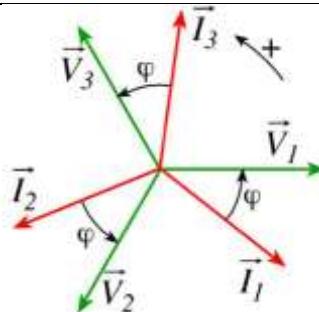


On constate sur les schémas que les courants en ligne sont égaux aux courants par phase.

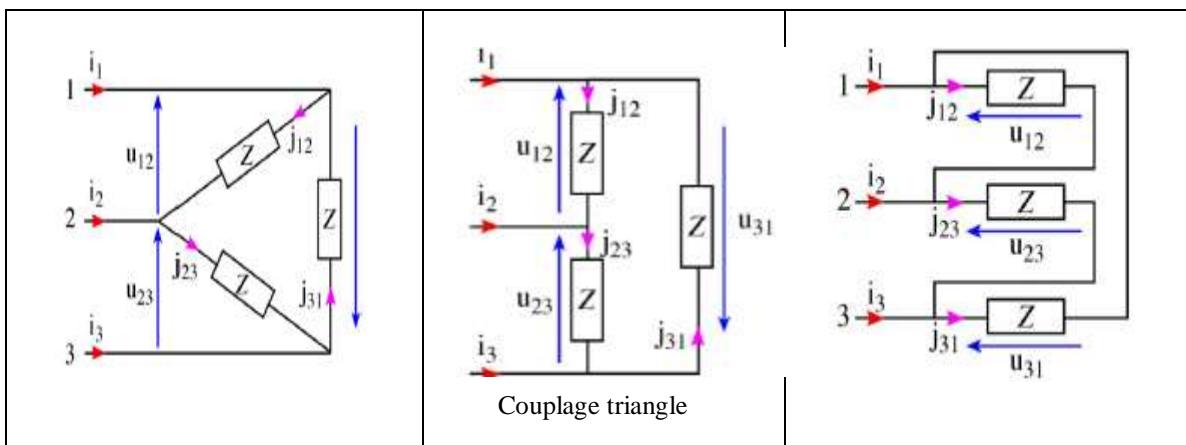
$$i_1 = j_1, i_2 = j_2 \text{ et } i_3 = j_3.$$

De plus la charge et le réseau sont équilibrés donc :  $I_1 = I_2 = I_3 = I = J$

On retiendra pour le couplage étoile :  $\mathbf{I} = \mathbf{J}$



#### f) Couplage triangle



Comme il s'agit des mêmes impédances :  $\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{j}_{12} + \mathbf{j}_{23} + \mathbf{j}_{31} = \mathbf{0}$ .  
Le fil neutre n'est pas nécessaire dans le montage triangle.

$$\begin{aligned}i_1 &= j_{12} - j_{31} \\i_2 &= j_{23} - j_{12} \\i_3 &= j_{31} - j_{23}\end{aligned}$$

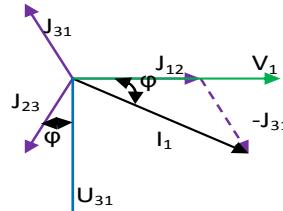
$$\begin{aligned}\vec{i}_1 &= \vec{j}_{12} - \vec{j}_{31} \\ \vec{i}_2 &= \vec{j}_{23} - \vec{j}_{12} \\ \vec{i}_3 &= \vec{j}_{31} - \vec{j}_{23}\end{aligned}$$

Le système triphasé est équilibré  
 $i_1 = i_2 = i_3 = i$   
 $J_{12} = J_{23} = J_{31} = J$

Pour le couplage triangle, la relation entre I et J est la même que la relation entre V et U

$$j = \frac{I}{\sqrt{3}}$$

Les déphasages pour les deux montages étoile et triangle sont les mêmes. Il s'agit du Déphasage provoqué par le dipôle Z du montage.



### III-2 PUISSANCES EN TRIPHASE

Puissance active

$$P = \sqrt{3} UI \cos \varphi$$

Puissance réactive

$$Q = \sqrt{3} UI \sin \varphi$$

Puissance apparente :

$$S = \sqrt{3} UI$$

Quel que soit le couplage, les puissances s'expriment de la même façon en fonction :

- De la tension composée U.
- Du courant en ligne I

Ces deux grandeurs sont les seules qui soient toujours mesurables quel que soit le couplage, même inconnu, du récepteur utilisé.

### III-3 RELEVEMENT DU FACTEUR DE PUISSANCE

Calcul de la valeur du condensateur

	Puissance active	Puissance réactive	Facteur de puissance
Charge Seule	P	$Q = P \operatorname{tg} \varphi$	$\cos \varphi$
Les trois condensateurs seuls	0	$Q_C = -3C\omega U^2$	0
Charge + Condensateurs	P	$Q_T = Q + Q_C = P \tan \varphi'$	$\cos \varphi'$

On en déduit que :

**a- pour un couplage des condensateurs en triangle :**

$$Q_C = Q_T - Q = -3C\omega U^2 = P \tan \varphi' - P \tan \varphi$$

Donc  $C = \frac{P \tan \varphi' - P \tan \varphi}{3\omega U^2}$

**b-pour un couplage des condensateurs en étoile**

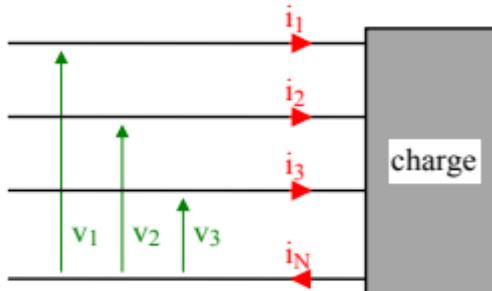
En utilisant la même démarche que précédemment, on montre que la capacité du condensateur est donnée par la relation :

$$C = \frac{P \tan \varphi - P \tan \varphi'}{3\omega V^2} = \frac{P \tan \varphi - P \tan \varphi'}{\omega U^2}$$

### Exercices chapitre III

**III.1** La ligne ci-contre est soumise à des tensions et des courants quelconques périodiques de même période.

Comment s'exprime la puissance moyenne (ou puissance active) qu'elle délivre à la charge ?

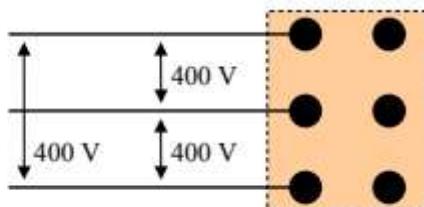
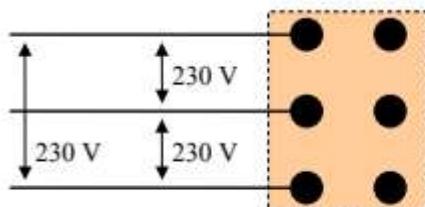


**III.2** Dans la liste ci-dessous, cocher toutes les réponses exactes dans le cas particulier du régime alternatif sinusoïdal triphasé équilibré en tensions et courants

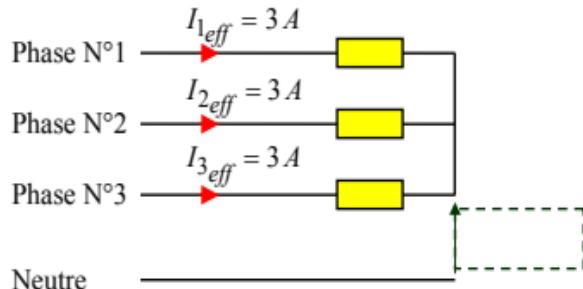
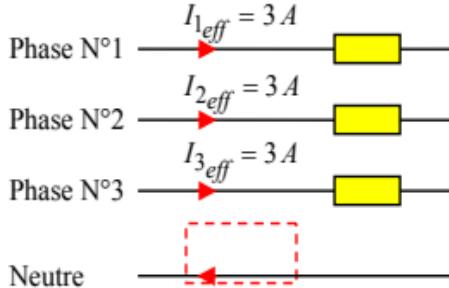
- $P = \sqrt{3} U_{max} I_{max} \cos(\vec{I}, \vec{V})$
- $P = \sqrt{3} U_{eff} I_{eff} \cos(\vec{I}, \vec{V})$
- $P = \sqrt{3} U_{eff} I_{eff} \cos(\vec{I}, \vec{U})$
- $P = 3 U_{eff} I_{eff} \cos(\vec{I}, \vec{U})$
- $P = < v_1(t).i_1(t) + v_2(t).i_2(t) + v_3(t).i_3(t) >$
- $P = < v_1(t).i_1(t) > + < v_2(t).i_2(t) > + < v_3(t).i_3(t) >$
- $P = V_{1eff}.I_{1eff}.\cos(\vec{I}_1, \vec{V}_1) + V_{2eff}.I_{2eff}.\cos(\vec{I}_2, \vec{V}_2) + V_{3eff}.I_{3eff}.\cos(\vec{I}_1, \vec{V}_1)$
- $P = 3 U_{max} I_{max} \cos(\vec{I}, \vec{U})$
- $P = 3 V_{eff} I_{meff} \cos(\vec{I}, \vec{V})$
- $P = 3 V_{eff} I_{meff} \cos(\vec{I}, \vec{U})$
- $P = < v(t).i(t) >$

**III.3** Soit une machine triphasée (équilibrée) dont la plaque signalétique indique une tension efficace d'alimentation de 230 V/400 V.

Représenter les liaisons à établir entre ses différentes bornes de façon que, dans chacun des deux cas ci-dessous, la machine soit alimentée sous tension nominale en régime alternatif sinusoïdal triphasé équilibré. (Les valeurs indiquées sont les tensions efficaces de la ligne.)



**III.4** Une ligne triphasée en régime alternatif sinusoïdal équilibré alimente un montage étoile équilibré constitué de trois impédances  $Z$ . Quelle est la valeur de  $I_{Neff}$  (lorsque le neutre est relié) ? Quelle est la valeur de  $V_{ON}$  (lorsque le neutre n'est pas relié) ?



**III.5** On considère une charge triphasée équilibré constitué de 3 impédances  $\underline{Z} = Z e^{j\phi}$  cablees en étoile sur un système de tension triphasées de tension simple  $\mathbf{V}$  et de tension compose  $\mathbf{U}$ .

- 1- Quelle relation relie  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  ?
- 2- Calculer l'expression littéraire du courant efficace  $I$  absorbe par une phase en fonction de  $\mathbf{V}$  et  $\underline{Z}$ .
- 3- Préciser l'expression des puissances actives et réactives consommées par cette charge.  
On considère à présent trois impédances  $\underline{Z}' = Z' e^{j\phi'}$  cablees en triangle sur le même système de tension triphasées. on appellera  $J'$  le courant de phase efficace circulant dans les impédances  $Z'$ .On appellera  $I'$  la valeur efficace du courant de ligne.
- 4- Quelle relation relie  $I'$  et  $J'$  ? quelle est donc l'expression de  $I'$  en fonction de  $\mathbf{V}$  et  $Z'$  ?
- 5- Préciser l'expression des puissances actives et réactives absorbées par cette charge en fonction de  $\mathbf{V}$ ,  $I'$  et  $\phi'$ .
- 6- En déduire la relation entre  $\phi$  et  $\phi'$  pour que ces deux charges soient équivalentes vues du réseau triphasé.
- 7- Calculer la relation entre  $Z$  et  $Z'$  pour que ces deux charges soient équivalentes.

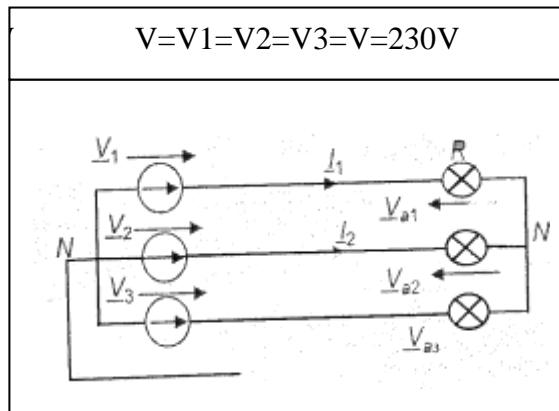
**III.6** On s'intéresse à l'installation électrique triphasés 230V/400V d'un atelier comportant :

- Des luminaires et des appareils de bureautique représentant 6 KW repartis

uniformément de 0.8 arrière.sur les 3 phases et de facteur de puissance unitaire.

- Trois machines triphasées consomment chacune 5KW avec un facteur de puissance 0.8.
  - Un appareillage particulier représentant trois impédances identiques  $\underline{Z} = 10\Omega + j.15\Omega$  câblées en triangle sur les phases.
- 1- Calculer les puissances actives et réactive  $P_Z$  et  $Q_Z$  consommées par les impédances  $\underline{Z}$ .
  - 2- Calculer la puissance active totale consommée par l'atelier.
  - 3- Calculer la puissance réactive totale consommée par l'atelier.
  - 4- En déduire la puissance apparente totale et la valeur du courant de ligne  $I$  consommé.
  - 5- Calculer la valeur du facteur de puissance de l'atelier, ce facteur est il tolérable par le fournisseur d'énergie ?
  - 6- Calculer les valeurs de capacités  $C$ , câblés en étoile, permettant de relever le facteur de puissance à la valeur 1.

**III.7** On souhaite dans cet exercice étudier l'incidence du neutre (relie ou pas) sur une installation triphasée très simple .cette installation est constituée de trois ensemble identiques d'ampoules d'éclairages, câblées en étoile avec ou sans neutre sur un générateur de tensions triphasées 230/400V.les ampoules sont des éléments résistifs et on estime leur consommation à 3 kW .le schéma de l'installation est représenté sur la figure.



- 1- Le système triphasé étant équilibré, et si le neutre est relié, que vaut la somme vectorielle  $\underline{I}_1 \underline{I}_2 \underline{I}_3$  ?.
- 2- Est il alors important de connecter le neutre (c'est-à-dire de relier par un fil les points N et N') dans cette installation ?
- 3- Sous quelle valeur de tension se trouvent les ampoules ?calculer alors la valeur de la résistance R équivalente aux ampoules de chaque phase.

- 4- Calculer l'expression littérale de  $I_1$  : la notation complexe du courant de la phase 1 du circuit triphasé en fonction de  $V_1$  et  $R$ . Calculer la valeur efficace de ce courant :  $I_1$ . Que sont les expressions des courants sur les autres phases  $I_2$  et  $I_3$  ?.
- 5- Représenter sur un diagramme dans le plan complexe les vecteurs  $V_1, V_2, V_3, I_1, I_2$  et  $I_3$  (on n'adoptera pas d'échelle particulière sur ce dessin mais on indiquera les valeurs efficaces et les déphasages suffisants à la compréhension).
- 6- On considère à présent qu'une anomalie a déconnecté toutes les ampoules branchées sur la phase 3 du circuit sur lequel le neutre n'est pas relié. Calculer l'expression littérale de  $I_1$  : la notation complexe du courant de la phase 1 du circuit triphasé en fonction de  $V_1, V_2$  et  $R$ .
- 7- Préciser la relation qui existe dans ce cas entre  $I_1$  et  $I_2$ . Préciser la valeur efficace du courant ;  $I_1$ .
- 8- Calculer alors sous quelle tension se trouve à présent les ampoules restantes.
- 9- Est-ce que les changements observés se seraient produits si le neutre avait été relié ? faut-il alors de préférence relier ou ne pas relier le neutre pour qu'une telle installation fonctionne correctement sans dépendre des charges qu'on lui impose ?

**III.8** Trois récepteurs monophasés, purement résistifs, sont montés en triangle sur le secteur 220/380V 50Hz. Sous 380V ils consomment 5.7kW chacun.

- 1- Calculer le courant dans chacun d'eux et le courant dans un fil de ligne.
- 2- Le récepteur monté entre les phases 2 et 3 est coupé. Déterminer les différents courants en ligne.
- 3- Les trois récepteurs sont maintenant en étoile. Calculer la puissance active totale et la comparer à la puissance active totale dans le cas d'un montage triangle.

**III.9** Une installation alimentée en triphasé 220/380V 50Hz comprend :

- 1- -Un moteur de puissance utile 8kW, de rendement 85% et de facteur de puissance 0,8.
- 2- -Un ensemble de 60 lampes 220V 100W.
- 3- Comment sont couplées les lampes ?
- 4- Calculer le courant en ligne et le facteur de puissance de l'ensemble.
- 5- Calculer la capacité des condensateurs couplés en triangle qui relève le facteur de puissance à 1.

### Solution Des Exercices Chapitre 3

#### S.III.1

- Tensions et courants quelconques périodiques de même période :

$$P = \langle v_1(t) \cdot i_1(t) \rangle + \langle v_2(t) \cdot i_2(t) \rangle + \langle v_3(t) \cdot i_3(t) \rangle = \langle v_1(t) \cdot i_1(t) + v_2(t) \cdot i_2(t) + v_3(t) \cdot i_3(t) \rangle$$

#### S.III.2

$$P = \sqrt{3} U_{max} I_{max} \cos(\vec{I}, \vec{V})$$

$$\blacklozenge P = \sqrt{3} U_{eff} I_{eff} \cos(\vec{I}, \vec{V})$$

$$P = \sqrt{3} U_{eff} I_{eff} \cos(\vec{I}, \vec{U})$$

$$P = 3 U_{eff} I_{eff} \cos(\vec{I}, \vec{U})$$

$$\blacklozenge P = \langle v_1(t) \cdot i_1(t) + v_2(t) \cdot i_2(t) + v_3(t) \cdot i_3(t) \rangle$$

$$\blacklozenge P = \langle v_1(t) \cdot i_1(t) \rangle + \langle v_2(t) \cdot i_2(t) \rangle + \langle v_3(t) \cdot i_3(t) \rangle$$

$$\blacklozenge P = V_{1eff} \cdot I_{1eff} \cdot \cos(\vec{I}_1, \vec{V}_1) + V_{2eff} \cdot I_{2eff} \cdot \cos(\vec{I}_2, \vec{V}_2) + V_{3eff} \cdot I_{3eff} \cdot \cos(\vec{I}_3, \vec{V}_1)$$

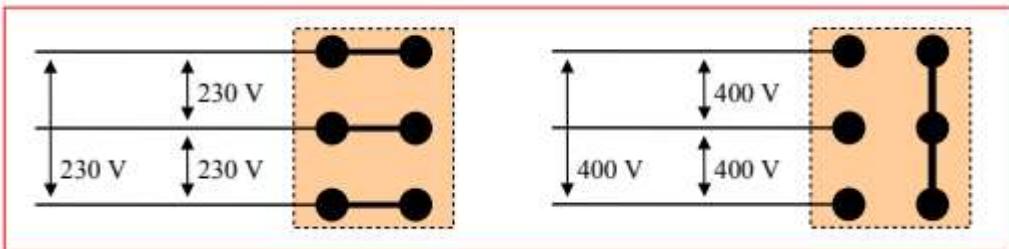
$$P = 3 U_{max} I_{max} \cos(\vec{I}, \vec{U})$$

$$\blacklozenge P = 3 V_{eff} I_{meff} \cos(\vec{I}, \vec{V})$$

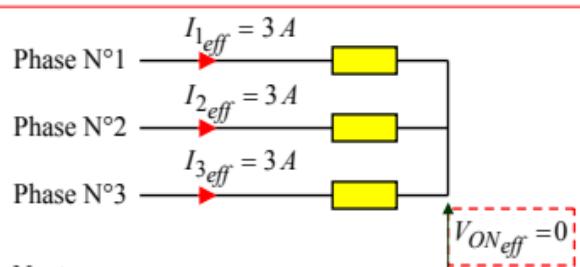
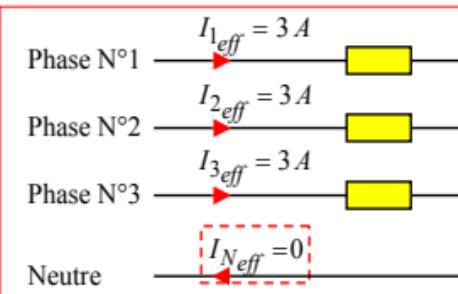
$$P = 3 V_{eff} I_{meff} \cos(\vec{I}, \vec{U})$$

$$\blacklozenge P = 3 \cdot \langle v(t) \cdot i(t) \rangle$$

#### S.III.3



#### S.III.4



#### S.III.5

1-  $U = \sqrt{3} \cdot V$

2- Le système est équilibré, chaque impédance  $Z$  est donc sous tension simple et les

relations de maille donnant les courants de lignes s'écrivent :  $\underline{V} = \underline{Z} \underline{I}$ , on déduit :  $I = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}}$ .

- 3- La puissance active consommé par la charge est  $P = 3VI\cos\phi$ .  
La puissance réactive consommé par la charge est  $Q = 3VI\sin\phi$ .

4-  $I' = \sqrt{3} J'$

Comme dans chaque impédance,  $\underline{U} = \underline{Z}' \times \underline{J}'$ ,  $I' = \sqrt{3} J' = \sqrt{3} \times \frac{\underline{U}}{\underline{Z}'} = \frac{3V}{\underline{Z}'}$ .

- 5- Les trois impédances sont câblées en triangle, c'est à dire quelles sont sous tension composées ( $\underline{U}$ ) parcourus par des courant de phases ( $\underline{J}'$ ). La puissance active totale consommée par la charge vaut donc :

$$P' = 3 \times U \times J' \cos \phi' = 3V\sqrt{3} \frac{I'}{\sqrt{3}} \cos \phi' = 3VI' \cos \phi'.$$

La puissance réactive totale consommée par la charge vaut :

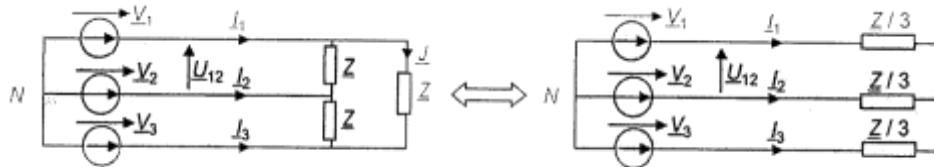
$$Q' = 3 \times U \times J \sin \phi' = 3VI \sin \phi'.$$

- 6- Si les deux charges sont équivalentes, elles consomment le même courant de ligne  $I=I'$ , la même puissance active  $P$  et la même puissance réactive  $Q$ .  
en écrivant  $P = 3 \times V \times I \times \cos \phi = 3VI \cos \phi' = Q = 3 \times V \times I \times \sin \phi = Q' = 3VI \sin \phi'$ . On en déduit que  $\phi=\phi'$ .

- 7- Il suffit ici d'écrire que  $I = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}} = I' = \frac{3V}{\underline{Z}}$

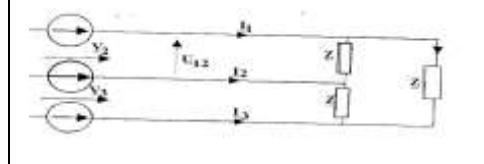
On en déduit que :  $Z = \frac{\underline{Z}'}{3}$  comme, par ailleurs les arguments des deux impédances sont égaux, on en déduit :  $\underline{Z} = Z e^{j\phi} = \frac{\underline{Z}'}{3}$

Pour résumer, une charge triangle est équivalente à une charge étoile composée des même impédances divisées par trois. On résume cette remarque par la figure ci-dessous



### S.III.6

- 1- Les impédances sont câblés en triangle c'est à dire conformément au schéma de la figure 2,



Le courant efficace qui traverse les trois impédances vaut :

$$J = \frac{U}{\sqrt{10^2 + 15^2}} = 22.2A.$$

la puissance réactive est due à la partie active des trois impédances et peut s'écrire :

$$P_z = 3 * 10 * J^2 = 14.77 \text{ Kw.}$$

La puissance réactive est due à la partie réactive des impédances.

$$Q_z = 3 * 15 * J^2 = 22.13 \text{ KVAR.}$$

- 2-  $P_{tot} = 6kw + 3 + 5kw = 35.77kw.$
- 3-  $Q_{tot} = 0 \text{ VAR} + 3 * 5 * 10^3 * \tan(\cos^{-1} 0.8) + Q_z = 33.38 \text{ KVAR.}$
- 4-  $S_{tot} = \sqrt{P_{tot}^2 + Q_{tot}^2} = 48.92 \text{ KVA.}$   
 $S_{tot} = 3 * V * I \text{ d'où: } I = \frac{S_{tot}}{3V} = 70.9A.$

- 5- Le facteur de puissance s'écrit :  $\cos \phi = \frac{P_{tot}}{S_{tot}} = 0.73$

Ce facteur de puissance est juste inférieur à la limite de 0.8 en dessous de laquelle les fournisseurs d'énergie électrique facturent des taxes aux utilisateurs.

- 6- Trois capacités C en étoile consomment la puissance réactive

$$Q_C = -3 \times \frac{V^2}{\frac{1}{C\omega}} = -3C\omega V^2$$

Pour obtenir un facteur de puissance unitaire, il faut que la puissance unitaire, il faut que la puissance réactive totale de l'installation et des capacités soit nulle. On écrit donc :

$$Q_C = -3C\omega V^2 = -Q_{tot} = -33.38 \text{ KVAR}$$

$$\text{On en déduit : } C = \frac{33.38 * 10^3}{3\omega V^2} = \frac{33.38 * 10^3}{3\omega V^2} = \frac{33.38 * 10^3}{3 \times 2\pi \times 230^2} = 1.3 \text{ mF.}$$

- 7- la puissance réactive totale étant nulle, l'installation est équivalente à trois résistances pures de même valeur R sur chaque phase.

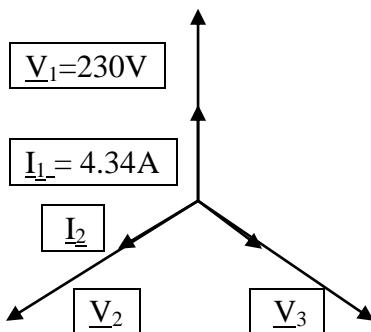
### S.III.7

- 1- le système est équilibré, les courants représentent trois vecteurs de même amplitude et déphasés de  $120^\circ$  entre eux, ainsi  $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ .
- 2- il n'est pas ici important de relier le neutre puisque le courant qui y passerait si c'était le cas serait nul. On dit alors que le neutre est indifférent.
- 3- La tension qui s'applique aux résistances est donc la tension simple :

$$V = 230V.$$

Ainsi ;  $P = 3 \text{ KW} = 3V^2/R$  d'où :  $R = 3 * V^2 / P = 52.9 \Omega$ .

- 4-  $I_1 = \left( \frac{V_1}{R} \right) \cdot I_1 = \left| \frac{V_1}{R} \right| = \frac{230}{52.9} = 4.34A$  par ailleurs :  $I_2 = \frac{V_2}{R}$  et  $I_3 = \frac{V_3}{R}$ .
- 5- On représente sur la figure ci-dessous le schéma demandé :

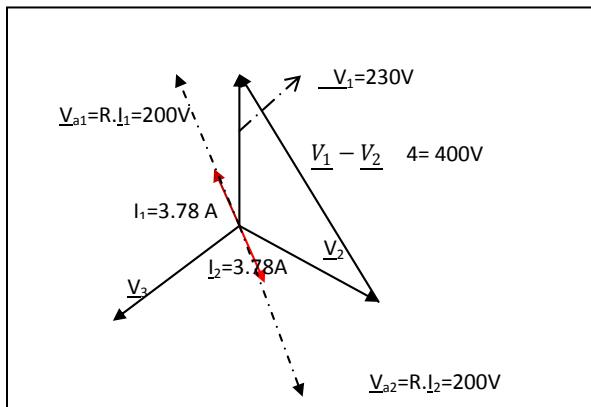


- 6- La nouvelle relation de maille passe par les phases 1 et 2 :  $\underline{V}_1 - \underline{V}_2 = 2R \times I_1$  soit donc :

$$I_2 = \frac{\underline{V}_1 - \underline{V}_2}{2R} = \frac{U_{12}}{2R}$$

7-  $I_2 = -I_1 = \frac{\underline{V}_1 - \underline{V}_2}{2R}$ . par ailleur :  $I_1 = \left| \frac{\underline{V}_1 - \underline{V}_2}{2R} \right| = \left| \frac{U_{12}}{2R} \right| = \frac{400}{105.8} = 3.78A$

- 8- La tension sous laquelle est chacune des deux ampoules est :  $V_a = R \times I_1 = 200V$ .
- 9- On représente le schéma demandé sur la figure dessous

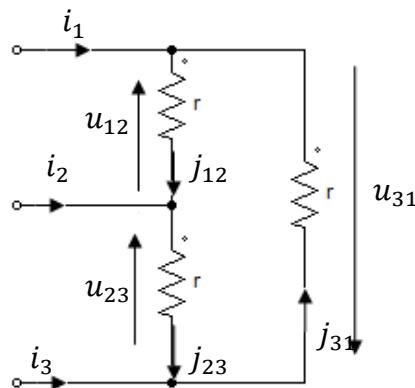


Si le neutre avait été relié, chaque ampoule serait restée sous la tension de 230V et aurait consommé le même courant qu'avant. L'absence du neutre a ici complètement modifié la nature du circuit lorsque la charge de la phase a disparu et les ampoules restantes sont à présent sous une tension plus faible que précédemment .mis à part le déséquilibre total du système, elles éclairent donc moins ce qui montre qu'un incident sur une des charges a une influence directe sur tout le reste du système.il est donc impératif ici de relier le neutre.

En réalité, la résistance des ampoules varie avec le courant qui les traverse. En effet, le filament chauffe et sa résistance augmente avec la chaleur. Ainsi deux valeurs de courants différentes ne représentent pas la même valeur de résistance équivalente.

### S.III.8

1- Couplage triangle :



- Le courant dans chaque récepteur

Charge résistive donc  $\cos \varphi = 1$  et la puissance consommée est donnée pour une tension composée 380V donc P s'écrit :

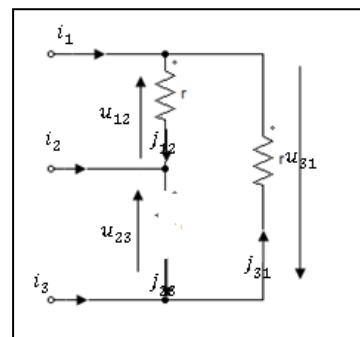
$$P = U * j * \cos \varphi \Rightarrow j = \frac{P}{U} = \frac{5.7 \cdot 10^3}{380 \cdot 1} = 15A$$

- Le courant de ligne I

$$I = j * \sqrt{3} = 15 * \sqrt{3} = 26A$$

2- récepteur entre 2 et 3 coupé ( Montage ci contre) :

$I_1$  est inchangé  $I_1=26A$   $I_3=J_{31}=15A$   $I_2=J_{12}=15A$

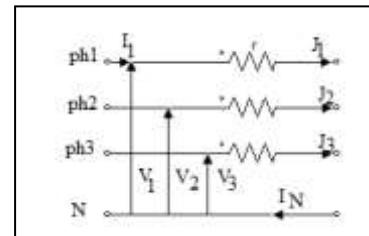


3- Couplage étoile

$I=V/Z$  (en triangle on a  $Z=U/J=25,3\Omega$ )

$I=220/25,3=8.69 A$  et  $P_Y= 3 V I \cos \varphi = 5735W$ .

$$P_\Delta=3*P_Y$$



### S.III.9

Récepteurs	$\cos \varphi$	$\tan \varphi$	P (W)	Q(VAR)
Moteur: 8kW, de rendement $\eta=85\%$	0,8	0,75	$P_M=P_u/\eta = 8000/0.85=9412$	$Q_M=P_M \cdot \tan \varphi = 7059$ Var
60 lampes 220V 100W	1	0	$60 \times 100 = 6000W$	$Q_L=P_{L1} \cdot \tan \varphi = 0$
Ens1 : $I = P_t/\sqrt{3} U \cos \varphi =$	0,909	$\tan \varphi =$	$P_t=P_M+P_L$	$Q_t=Q_M+Q_L=7059$

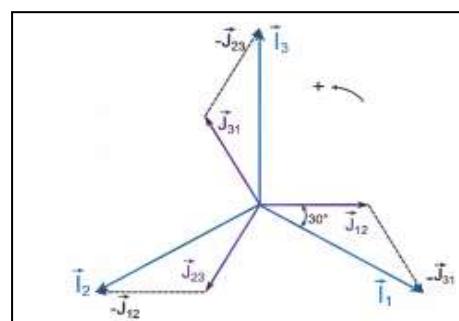
25.75A		Q/P =0,458	=15412W	
Condensateur : On calcule Qc			0	$Q_c = Q'_t - Q_t = -7059$ $Q_c = -3 U^2 C_\Delta \omega \Rightarrow$ $C_\Delta = 51.9 \mu F$

### S.III.10

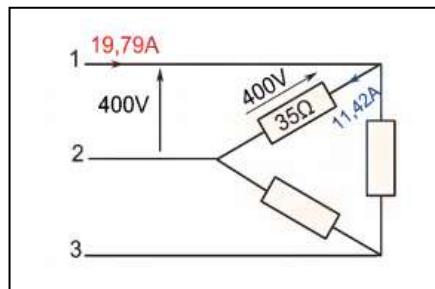
1- Le couplage est triangle car chaque dipôle doit être branché entre deux phases du réseau et soumis à la tension composée  $U=400V$ .

$$2- J = \frac{V}{Z} = \frac{400}{35} = 11.42A \Rightarrow I = J\sqrt{3} = 11.42\sqrt{3} = 19.79A$$

3- Représentation vectorielle de Fresnel



4- Schéma branchement



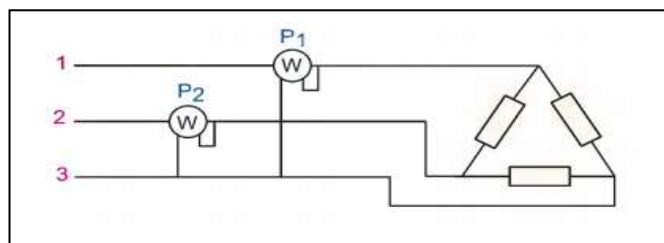
$$5- P = \sqrt{3}UI \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 19.97 \cdot \cos 60^\circ = 6855.45W$$

$$Q = \sqrt{3}UI \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 19.97 \cdot \sin 60^\circ$$

$$S = \frac{P}{\cos \varphi} = \frac{6855.45}{0.5} = 13710.9 V.A$$

6- Pour mesurer la puissance active absorbée par le récepteur ,on applique la méthode des deux wattmètres car le neutre n'est pas accessible lorsque le couplage est en triangle.

7- Montage



*Chapitre IV*

***Circuits magnétiques***

## IV- CIRCUITS MAGNETIQUES

### IV-1 GENERALITE ET PARAMETRES DU CIRCUIT MAGNETIQUE

Les inductances, transformateurs, alternateurs, machines asynchrones, etc., sont basés sur l'utilisation de circuits magnétiques, c'est-à-dire de masses de matériaux dits « magnétiques » propres à canaliser une induction magnétique. Plus que de l'induction, on parle souvent du « flux » de cette induction. La figure IV.1 présente un résumé des grandeurs mises en jeu dans les circuits magnétiques linéaires ainsi que des relations simplifiées qui les relient

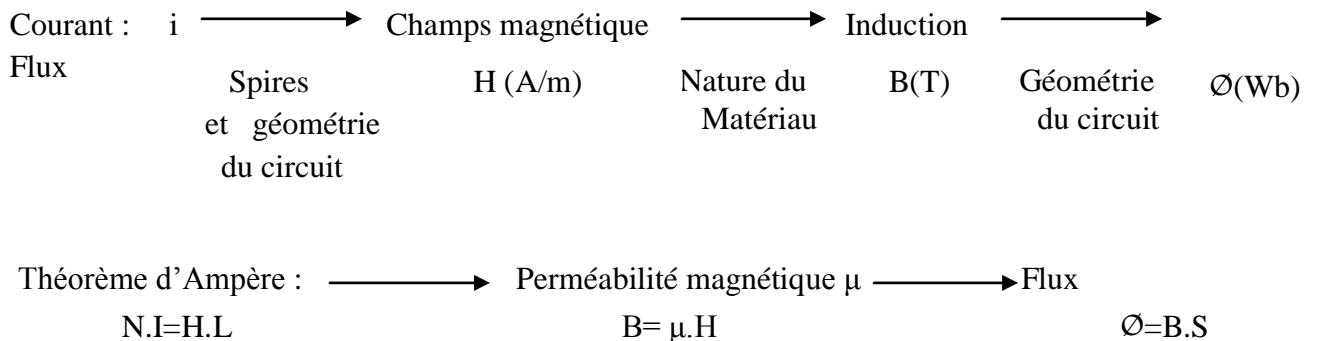


Figure VI.1 Les grandeurs du magnétisme en électrotechnique

### IV-2 CIRCUITS MAGNETIQUES HOMOGENES ET LINEAIRES

Les circuits magnétiques sont essentiellement réalisés avec des matériaux ferromagnétiques ou ferromagnétiques car ils permettent d'obtenir des inductions élevées. Dans le fer, les lignes de champs sont « concentrées » dans la matière ce qui produit de grandes valeurs du flux. L'allure classique d'un circuit magnétique est représentée sur la figure IV.2

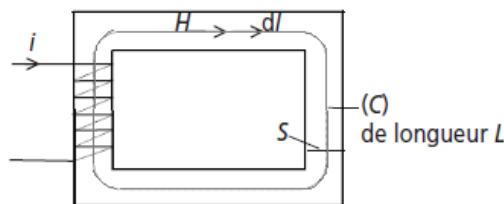


Figure IV.2 Morphologie classique d'un circuit magnétique bobiné.

Dans ce circuit magnétique la canalisation des lignes de champ étant importante, on fait l'hypothèse que le champ magnétique est constant. Le théorème d'Ampère s'écrit sur ce contour

$$\int_C \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_C H \cdot dl = N \cdot I \text{ Soit donc } .H.L=N.I$$

On écrit alors, pour les circuits linéaires  $B = \mu H = \frac{\mu N.I}{L}$  c'est-à-dire  $\emptyset = B.S = \frac{\mu S N.I}{L}$

Pour retenir une relation pratique entre le flux et le courant qui le crée, on fait intervenir la grandeur appelée Réluctance et notée R satisfaisant à la relation dite d'Hopkinson :

$$N.I = \mathfrak{R} \Phi.$$

En résumé, pour caractériser toutes les grandeurs dans un circuit magnétique homogène linéaire, on retiendra la relation :

$$N.I = \mathfrak{R} \Phi \text{ avec } \mathfrak{R} = \frac{L}{\mu \cdot S}$$

### IV-3 CIRCUITS MAGNETIQUES HETEROGENES LINEAIRES

Un circuit est dit hétérogène dès lors qu'il est constitué de matériaux différents ou de géométries à sections variables. La méthodologie va consister, comme dans un circuit électrique, à utiliser les associations connues de réluctances afin de calculer les différentes grandeurs. On représente sur la figure IV.3

Les cas de circuits hétérogènes série et parallèle. Pour chaque circuit, on représente également l'analogie électrique correspondante en utilisant le caractère  $\mathfrak{R}$  pour désigner de façon usuelle une réluctance

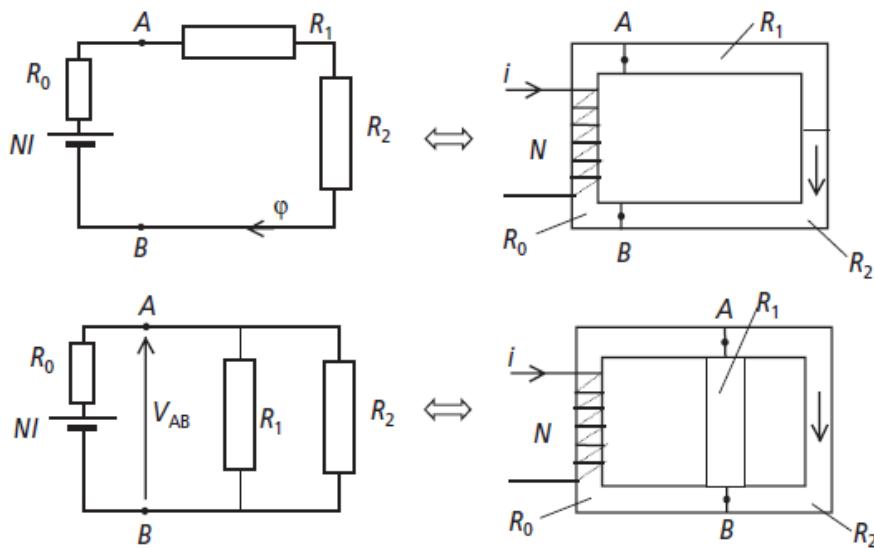


Figure IV.3 Circuits magnétiques hétérogènes série et parallèles

### IV-4 ANALOGIE AVEC LES CIRCUITS ELECTRIQUES

L'utilisation de la notion de réluctance permet de dresser une analogie entre les relations des circuits magnétiques et les relations des circuits électriques. On résume les caractéristiques de cette analogie sur le tableau V.1. Cette analogie sera utilisée sans retenue

dans les circuits linéaires et fait de l'étude des circuits magnétiques classiques un ensemble de techniques faciles à maîtriser pour l'électrotechnicien.

Circuits électriques	Circuits magnétiques
$U$ : Force électromotrice <i>fem</i>	$NI$ : Force magnétomotrice <i>fmm</i>
$R$ : Résistance	$\mathcal{R}$ : Réductance
Loi d'Ohm : $U = R \cdot I$	Loi d'Hopkinson : $N.I = \mathcal{R} \Phi$
Associations de Résistances	Associations de Réductances
Série : $R = R_1 + R_2$	Série : $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2$
Parallèle : $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$	Parallèle : $\mathcal{R} = \frac{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2}$

### a) Inductance

L'inductance est, en régime linéaire, la grandeur de proportionnalité entre le courant dans le bobinage et le flux dit « total » intercepté par le bobinage, c'est-à-dire le flux :

$$\Phi_T = N \cdot \phi \text{ On écrit alors : } \phi_T = N \cdot \frac{N \cdot I}{\mathcal{R}} = L \cdot I$$

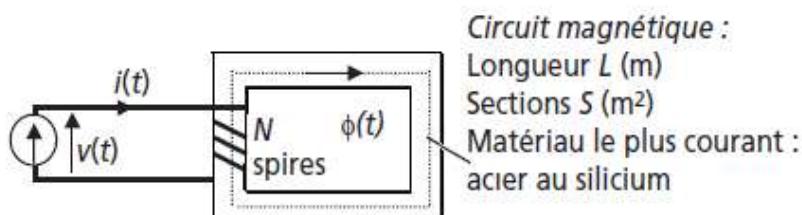
La grandeur  $L$  est l'inductance du circuit magnétique bobiné, son unité est le Henry (H).

On retiendra

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}}$$

### b) Circuits magnétiques en régime alternatif sinusoïdal

En régime alternatif sinusoïdal, la relation entre la tension aux bornes du bobinage enroulé sur un circuit magnétique et le flux qui le parcourt est la loi de Lenz. On résume ces considérations, très importantes pour l'étude et la réalisation des circuits magnétiques, autour de la figure V.3.



$$v(t) = V\sqrt{2} \cos(\omega t)$$

Loi de Lenz : la loi de lenz s'écrit, en convention générateur :

$$v(t) = N \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi_T}{dt}$$

Relation tension et induction :

$$v(t) - N \frac{d\Phi}{dt} = V\sqrt{2} \cos(\omega t) \Rightarrow \Phi(t) = \frac{V\sqrt{2}}{N\omega} \sin(\omega t) = B(t).S$$

Ainsi

$$B_{max} = \frac{V\sqrt{2}}{S.N.\omega} = \frac{V\sqrt{2}}{S.N.2\pi f} \text{ ou } V = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} N \cdot B_{max} \cdot S \cdot f$$

On retiendra la relation :

$$V = 4.44 \cdot N \cdot B_{max} \cdot S \cdot f$$

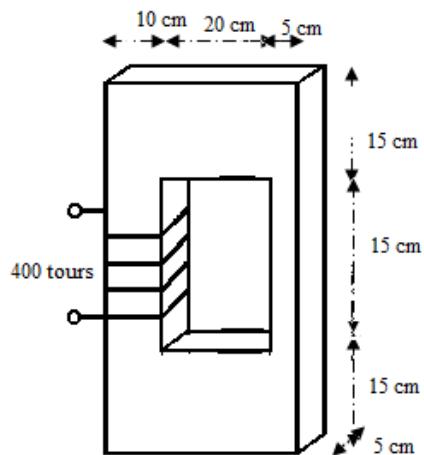
## Exercices Circuit magnétiques

**IV.1** Un noyau ferromagnétique est représenté sur la figure 1. La profondeur de la culasse est de 5 cm. Les autres dimensions du noyau sont comme

indiqué dans la figure en face.

On suppose que la perméabilité relative du noyau est 1000.

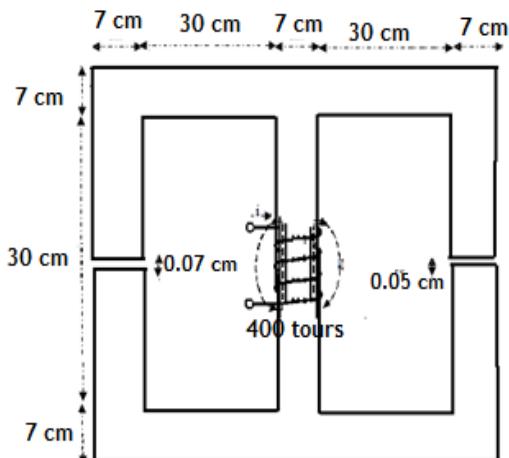
- 1- Trouver la valeur du courant qui va produire un flux de 0,005 Wb. Avec ce courant,
- 2- quelle est la densité de flux dans la partie supérieure de la culasse ?
- 3- Quelle est la densité du flux sur le côté droit du noyau ?



**IV.2** Un noyau ferromagnétique ayant une perméabilité relative de 2000 est représentée sur la figure 2. Les dimensions sont indiquées sur le schéma, et la profondeur de culasse est de 7 cm.

Les entrefers sur les côtés gauche et droit de la bobine sont 0,070 et 0,050 cm, respectivement. La surface effective des espaces d'air est 5% plus grande que leur taille physique. S'il y a 400 tours dans la bobine enroulée autour de la branche centrale du noyau et si le courant dans la bobine est de 1,0 A.

- 1- qu'elle est le flux dans chacune des branches gauche, au centre, et la branche droite du noyau ?
- 2- Quelle est la densité de flux dans chaque intervalle d'air



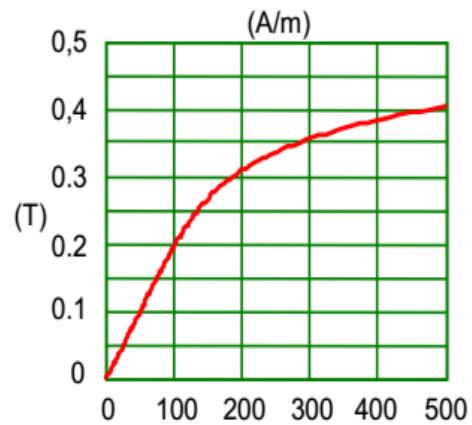
**IV.3** Déterminer l'expression de l'inductance L d'un solénoïde. N = 1000 spires ; l = 80 cm ; S = 36 cm<sup>2</sup>. Le solénoïde est traversé par un courant de 0,5 A.

- 1- Quelle est l'énergie emmagasinée par le solénoïde



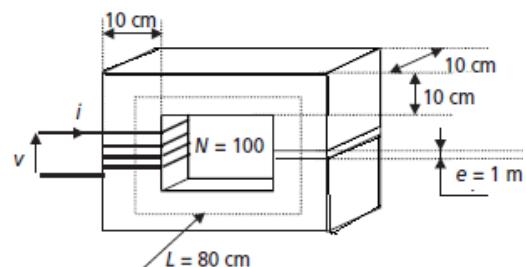
**IV.4** On considère un tore en matériau ferrite dépourvu d'entrefer et possédant les caractéristiques suivantes :  $l_{\text{moy}} = 5 \text{ cm}$ ,  $S = 0,5 \text{ cm}^2$ , Caractéristique de magnétisation  $B = f(H)$  voir figure ci-dessous. On bobine régulièrement **10** spires tout autour de ce tore.

- 1- Indiquer dans quel domaine de  $H$  cette caractéristique est linéaire. Dans cette zone, calculer la perméabilité absolue  $\mu_a$  du matériau. Dans les mêmes conditions, calculer sa perméabilité relative
- 2- Calculer la valeur de sa réluctance correspondant à sa partie linéaire, ainsi que son inductance spécifique.
- 3- Calculer la valeur du coefficient d'auto-inductance de ce circuit correspondant à la partie linéaire de sa caractéristique magnétique ?



**IV.5** On bobine **N=100** spires de fil de cuivre sur le circuit magnétique représenté de la figure suivante. Le matériau utilisé est du fer de perméabilité magnétique relative  $\mu_r = 528,6 \text{ SI}$

- 1- Calculer la surface d'une section droite du circuit magnétique.
- 2- Calculer la réluctance  $\mathcal{R}_f$  du fer du circuit magnétique.
- 3- Calculer la réluctance  $\mathcal{R}_e$  de la tranche d'air que constitue l'entrefer
- 4- Calculer alors la réluctance totale  $\mathcal{R}$  que représente le circuit magnétique.
- 5- En déduire la valeur de l'inductance que représentent les 100 spires bobinées sur ce circuit magnétique.
- 6- Calculer la valeur de l'induction maximale produite dans le fer lorsque l'inductance est sous la tension  $v(t) = 230\sqrt{2} \sin 314\omega t$
- 7- Calculer la valeur du courant efficace



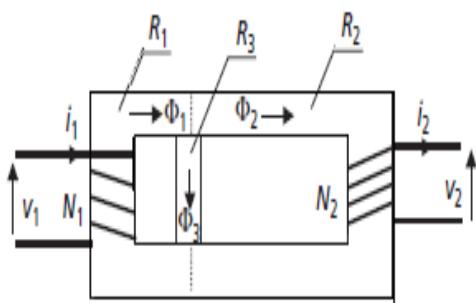
absorbé par l'inductance formée par les **100** spires sous la tension  
 $v(t) = 230\sqrt{2} \sin 314\omega t$ .

**IV.6** On s'intéresse au circuit magnétique, représenté en coupe sur la *figure* en face , sur lequel sont bobinés deux enroulements de fil de cuivre. Les réluctances des tronçons sont directement notées  $\mathcal{R}_1$ ,  $\mathcal{R}_2$  et  $\mathcal{R}_3$ .

Le tronçon 3 représente les fuites du bobinage 1, c'est-à-dire un ensemble de trajets de lignes de champ traversant ce bobinage mais pas l'autre.

- 1- Représenter le schéma équivalent (en analogie avec un circuit électrique) de ce circuit magnétique.
- 2- Écrire la relation reliant  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  et  $\Phi_3$ .
- 3- En considérant que le bobinage 2 est ouvert ( $i_2 = 0$ ), calculer l'expression littérale du flux  $\Phi_2$
- 4- Calculer également l'expression littérale du flux  $\Phi_3$
- 5- Calculer l'expression de l'inductance mutuelle  $M$  du bobinage 1 sur le bobinage 2.
- 6- Calculer également l'expression de l'inductance  $L_f$  qui représente le facteur de proportionnalité entre le flux  $\Phi_3$  et le courant  $i_1$ .

En utilisant la loi de Lenz, montrer qu'il est possible de ramener cette inductance en série avec un circuit magnétique plus simple qu'on représentera. On appellera  $V'_1$  la tension aux bornes du bobinage 1



**IV.7** On considère l'électroaimant représenté sur la figure en face.

Les deux parties de cet électro-aimant sont réalisées en acier moulé dont on fournit ci dessous la caractéristique d'aimantation sous la forme du tableau

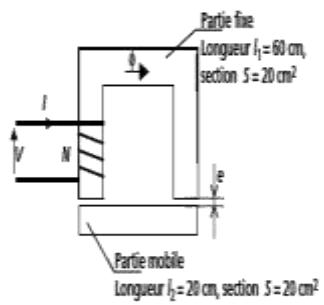
B(T)	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2
H (A/m)	380	490	600	760	980	1300

B(T)	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	
H (A/m)	1700	2450	3300	4700	7500	

La partie mobile étant en contact avec la partie fixe, on désire créer un flux  $\phi = 2 \cdot 10^{-3}$  Wb. Calculer la valeur de l'induction B correspondante. En déduire la valeur du champ magnétique et la valeur du nombre minimal de spires permettant d'obtenir ce flux si le courant I est limité à 20 A par le générateur.

Le bobinage sera constitué définitivement de deux fois ce nombre de spires.

- 1- La partie mobile est à présent décollée de la partie fixe d'un entrefer  $e = 1$  mm. Calculer le courant nécessaire à l'établissement d'un flux  $\phi = 2 \cdot 10^{-3}$ . Calculer alors le nombre de spires réellement nécessaires pour imposer ce flux.
- 2- Représenter la courbe sans échelle  $\phi = f(NI)$  pour l'entrefer seul et pour le circuit en acier moulé seul. En déduire une représentation sans échelle  $\phi = f(NI)$  pour le circuit magnétique total. Commenter.

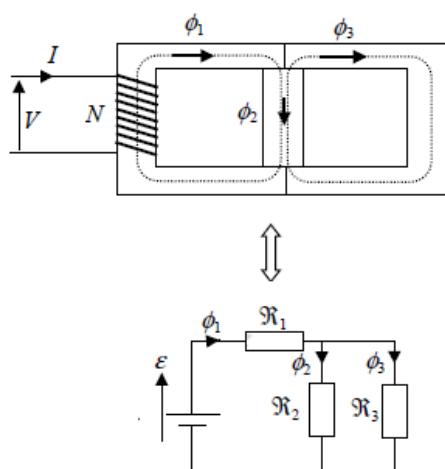


**IV.8** Dans cet exercice, on s'intéresse à un circuit magnétique très commun, représenté en coupe sur la figure ci contre, pouvant servir à réaliser des inductances ou des transformateurs monophasés. L'objectif de l'exercice est de déterminer le nombre de spires N à bobiner pour en faire une inductance  $L=20\text{mH}$ .

On donne les dimensions et caractéristiques suivantes :

$l_1=30\text{ cm}$ ,  $l_2=10\text{ cm}$ ,  $l_3=30\text{ cm}$ ,  $S_1=S_2=S_3=20\text{ cm}^2$ , perméabilité relative :  $\mu_r=1500$ .

- 1- Que représente la grandeur notée  $\varepsilon$  sur le schéma équivalent ?
- 2- Donner les expressions et calculer les valeurs des réluctances  $\mathfrak{R}_1$ ,  $\mathfrak{R}_2$  et  $\mathfrak{R}_3$ .
- 3- Calculer la réluctance  $\mathfrak{R}$  équivalente au circuit magnétique (on s'aidera du schéma équivalent représenté sur la figure ci contre).



4- Calculer alors le nombre de spires N à bobiner pour réaliser une inductance  $L=20\text{mH}$ . Cette inductance est destinée à être utilisée en régime alternatif sinusoïdal, à la fréquence  $f=400 \text{ Hz}$

On cherche à déterminer le courant efficace maximal qu'elle pourra supporter sans être saturer.

5- Enoncer la ( relation tension / Fréquence /Induction » qui relie la tension efficace V (aux bornes du bobinage) à la valeur maximale  $B_{\max}$  de l'induction et à la fréquence f .

6- Quelle relation relie la tension complexe V et courant complexe I ? En passant aux modules, quelle relation relie alors V à la valeur efficace du courant I ?

7- En se servant des deux dernières questions calculer la valeur efficace du courant permettant de ne pas dépasser  $B_{\max}=1,5 \text{ T}$  au sein du bobinage.

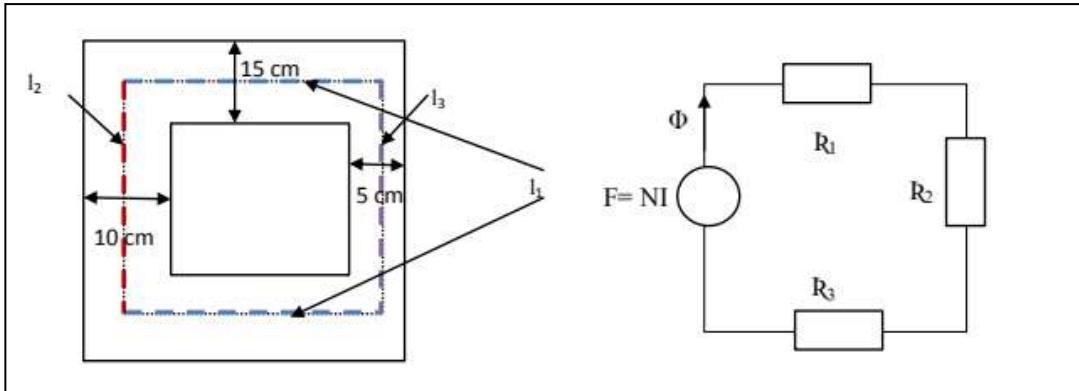
8- Pour pouvoir augmenter la valeur de ce courant, on pratique un entrefer d'épaisseur  $e = 1\text{mm}$  dans la branche « 1 » du circuit magnétique. Calculer alors la nouvelle valeur de la réluctance équivalente.

9- Calculer ainsi la nouvelle valeur de l'inductance obtenue et le nouveau courant efficace maximal.(permettant toujours de ne pas dépasser  $B_{\max}=1,5 \text{ T}$  au sein du bobinage).

## Solution Des Exercices Chapitre 4

### S IV.1

La région dépend de la section et de la perméabilité, dans cet exercice la perméabilité est la même donc on divisera les régions suivant la section, on conclut qu'il ya trois régions (la première région c'est l'ensemble du haut et du bas puisqu'il a la même épaisseur et la deuxième région celle de droite et la dernière celle de gauche )



#### 1- Le courant total

Les longueurs moyennes :

$$l_1 = (20 + 2.5 + 5) \times 2 = 55 \text{ cm}$$

$$l_2 = (7.5 + 15 + 7.5) = 30 \text{ cm}$$

$$l_3 = (7.5 + 15 + 7.5) = 30 \text{ cm}$$

Les sections des trois régions :

$$S_1 = 0.15 * 0.05 = 0.0075 \text{ m}^2$$

$$S_2 = 0.10 * 0.05 = 0.005 \text{ m}^2$$

$$S_3 = 0.05 * 0.05 = 0.0025 \text{ m}^2$$

Les réactances des trois régions :

$$\mathcal{R}_1 = \frac{l_1}{\mu * S_1} = \frac{l_1}{\mu_r \mu_0 * S_1} = \frac{0.55}{1000 * (4\pi 10^{-7}) 0.0075} = 58.36 \text{ KAt/Wb}$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{l_2}{\mu * S_{21}} = \frac{l_2}{\mu_r \mu_0 * S_2} = \frac{0.30}{1000 * (4\pi 10^{-7}) 0.005} = 47.75 \text{ KAt/Wb}$$

$$\mathcal{R}_3 = \frac{l_1}{\mu * S_3} = \frac{l_1}{\mu_r \mu_0 * S_3} = \frac{0.30}{1000 * (4\pi 10^{-7}) 0.0025} = 95.49 \text{ KAt/Wb}$$

La reluctance totale :

$$\mathcal{R}_T = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 = 201.6 \text{ KAt/Wb}$$

Le courant total :

$$I = \frac{\Phi * \mathcal{R}_T}{N} = 2.52 \text{ A.}$$

#### 2- La densité du flux dans la partie supérieure de la culasse :

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1} = \frac{0.005}{0.0075} = 0.67 \text{ T}$$

#### 3- Le densité du flux dans la partie supérieure de la culasse :

$$B_3 = \frac{\Phi}{S_3} = \frac{0.005}{0.0025} = 2T$$

#### S.IV.2

##### 1- Les valeurs des flux

Il ya cinq 5 régions :

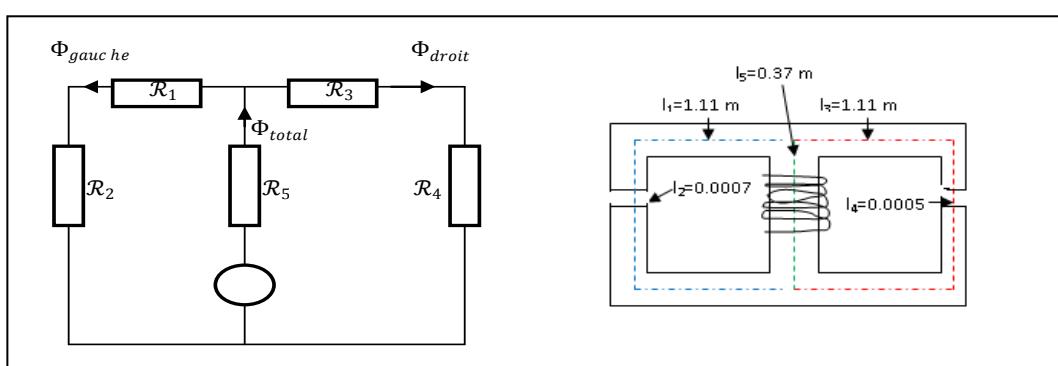
$\mathcal{R}_1$  : reluctance de la branche gauche

$\mathcal{R}_2$  : reluctance de l'entrefer gauche

$\mathcal{R}_3$  : reluctance de la branche droite

$\mathcal{R}_4$  : reluctance de l'entrefer droit

$\mathcal{R}_5$  : reluctance de la branche centrale



les longueurs moyennes

$$l_1 = 3.5 + 30 + 3.5 + 3.5 + 30 + 3.5 + 3.5 + 30 + 3.5 = 111 \text{ cm}$$

$$l_3 = l_1 = 111 \text{ cm}$$

$l_2 = 0.0007 \text{ m}$  entrefer gauche

$l_4 = 0.0005 \text{ m}$  entrefer droit

$$l_5 = 3.5 + 30 + 3.5 = 37 \text{ cm}$$

Calcul des reluctances

$$\mathcal{R}_1 = \frac{l_1}{\mu * S_1} = \frac{l_1}{\mu_r \mu_0 * S_1} = \frac{1.11}{2000 * 4\pi 10^{-7} * 0.07 * 0.07} = 90.1 KAt/Wb$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{l_2}{\mu * S_2} = \frac{l_2}{\mu_0 * S_2} = \frac{0.0007}{4\pi 10^{-7} * (0.07 * 0.07) * 1.05} = 108.3 KAt/Wb$$

$S_2$  c'est la section de surface de l'entrefer qui est de 5% plus grande que la taille physique .

$$S_2 = S + 5\% \quad S = S(1+0.05) = 1.05 * S \text{ et } S = 0.07 * 0.07 \text{ m}^2$$

$$\mathcal{R}_3 = \frac{l_3}{\mu * S_3} = \frac{l_3}{\mu_0 \mu_r * S_3} = \frac{1.11}{2000 * 4\pi 10^{-7} * (0.07 * 0.07) * 1.05}$$

$$\mathcal{R}_4 = \frac{l_4}{\mu * S_4} = \frac{l_4}{\mu_0 * S_4} = \frac{0.0005}{4\pi 10^{-7} * (0.07 * 0.07) * 1.05} = 77.3 KAt/Wb$$

$$S_4 = S + 5\% \quad S = S(1+0.05) = 1.05 * S \text{ et } S = 0.07 * 0.07 \text{ m}^2$$

$$\mathcal{R}_5 = \frac{l_5}{\mu * S_5} = \frac{l_5}{\mu_0 \mu_r * S_5} = \frac{0.37}{4\pi 10^{-7} * 2000 * (0.07 * 0.07)} = 30.0 KAt/Wb$$

$$\mathcal{R}_{total} = \mathcal{R}_5 + \frac{(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2) * (\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4)}{(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2) + (\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4)} = 30 + \frac{(90.1 + 108.3) * (90.1 + 77.3)}{(90.1 + 108.3) + (90.1 + 77.3)} = 120.8 KAt/Wb$$

Le flux total dans la branche centrale est

$$\Phi_t = \frac{fmm}{\mathcal{R}_t} = \frac{400 * 1}{120.8} = 0.0033 \text{ Wb}$$

Le flux total dans la branche gauche est :

$$\begin{aligned}\Phi_{gauche} &= \Phi_t * \frac{(\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4)}{(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2) + (\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4)} = 0.0033 \frac{90.1 + 77.3}{90.1 + 108.3 + 90.1 + 77.3} \\ &= 0.00193 \text{ Wb}\end{aligned}$$

Le flux total dans la branche droite est

$$\begin{aligned}\Phi_{droite} &= \Phi_t * \frac{(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2)}{(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2) + (\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4)} = 0.0033 \frac{90.1 + 108.3}{90.1 + 108.3 + 90.1 + 77.3} \\ &= 0.00292 \text{ Wb}\end{aligned}$$

2- La densité de flux dans les entrefer

$$B_{gauche} = \frac{\Phi_{gauche}}{S_2} = \frac{0.00193}{0.07 * 0.07 * 1.05} = 0.375 \text{ T}$$

$$B_{droite} = \frac{\Phi_{droite}}{S_4} = \frac{0.00292}{0.07 * 0.07 * 1.05} = 0.445 \text{ T}$$

### S.IV.3

1- Expression de l'inductance

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} = 4\pi 10^{-7} \frac{1000^2}{80 * 10^{-2}} 36 * 10^{-4} = 5.65 10^{-3} \text{ H}$$

2- L'énergie emmagasinée

$$E = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} * 5.65 10^{-3} * 0.5^2 = 7.06 10^{-3} \text{ J}$$

### S.IV.4

1-

a-1 Linéaire pour  $0 < H < 100 \text{ A/m}$

b-1 Permeabilité absolue  $\mu_a = 2 \text{ 10}^{-3} \text{ SI}$

$$c-1 \mu_r = \frac{\mu_a}{\mu_r} = 1592 = 1600$$

$$2- \mathcal{R} = \frac{l}{\mu_a * S} = \frac{0.05}{2 * 10^{-3} * 0.5 * 10^{-4}} = 0.5 * 10^6, \text{ l'inductance spécifique } = \mathcal{R}^{-1} = 2 \text{ 10}^{-6}$$

$$3- L = A_l * N^2 = 200 \mu\text{H}$$

4-1 Quand on s'écarte du matériau, la perméabilité  $\mu_0$  diminue ce qui fait croître la résistance et diminuer le coefficient d'auto-inductance  $L$

4-2 Étant proportionnel à la perméabilité du matériau, on en déduit que  $L_{air} = 200/1600 = 0.063 \mu\text{H}$

$$5- \Phi = B * S = 0.2 * 0.5 10^{-4} = 10^{-5} \text{ Wb}; \Phi = N * B * S = 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$6- \text{Théorème d'Ampère : } H * I = N * I \Leftrightarrow I_{max} = \frac{100 * 0.05}{10} = 0.5 \text{ A}$$

7-

$$a- \mathcal{R}_T = \mathcal{R}_{fer} + \mathcal{R}_{entrefer} = 0.45 10^6 + 15.92 10^6 \text{ At/Wb}$$

$$b- L = \frac{N^2}{R_T} = 6.1 \mu H.$$

Propriete des tubes de lignes d'induction :le flux s'y conserve ;la section étant constante ,cela implique que l'induction est elle-même identique dans le tore et dans

$$l'entrefer : \beta_{fer} = \beta_{entrefer} = 0.2T \text{ au point maximal de } \beta(H) ; \text{ donc } H_{fer} = \frac{\beta_{fer}}{\mu_a} =$$

$$100A/m ; \text{ et } H_{entrefer} = \frac{\beta_{entrefer}}{\mu_0} = \frac{0.2}{4\pi 10^{-7}} = 160.10^3 A/m. \text{ Tehoreme d'ampere :}$$

$$H_{fer}l_{fer} + H_{entrefer}l_{entrefer} = NI_{max} \Leftrightarrow 100 * 0.024 + 160.10^3 * 0.001 = 10 I_{max} \Rightarrow I = 16A.$$

c- Conclusion : l'entrefer accroît la valeur du courant maximal possible correspondant à la zone linéaire au détriment d'une diminution du coefficient d'auto-inductance de la bobine

#### S.IV.5

$$1- S = 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} = 100 \text{ cm}^2 = 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$2- \text{ La longueur moyenne du profil en fer est : } L_f = L - e \approx L = 80 \text{ cm}$$

On considère que la section du circuit est constante (on néglige les effets de coins) et la perméabilité relative du fer est :  $\mu_R = 528,6 \text{ SI}$

$$\text{On écrit donc la réluctance : } \mathcal{R}_f = \frac{L}{\mu * S} = \frac{L}{\mu_R \mu_0 * S} = \frac{0.8}{4\pi 10^{-7} * 528.6 * 10^{-2}} = 120423 \text{ SI}$$

$$3- \text{ Dans la couche d'air que forme l'entrefer : } \mathcal{R}_a = \frac{e}{\mu_0 * S} = \frac{10^{-3}}{4\pi 10^{-7} * 10^{-2}} = 79577 \text{ SI}$$

4- Les deux circuits, fer et air, sont associés en série. La reluctance total du circuit magnétique formé sera donc :  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_f + \mathcal{R}_a = 200000 \text{ SI}$ .

5- L'inductance que représentent les 100 spires du bobinage sur ce circuit est :

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = 50mH$$

6- L'induction maximale dans le circuit magnétique est donnée par la formule :  $V = 4.44NB_{max}.S.f$  où  $N = 100$ ,  $f = 50 \text{ Hz}$  et  $S = 10^{-2} \text{ m}^2$ . On en déduit :

$$B_{max} = \frac{V}{4.44.N.S.f} = 1.03 \text{ T}$$

Si on ne décide de bobiner que 10 spires, l'application de la formule donne :  $B_{max} = 1.03 \text{ T}$ ! Cette valeur est impossible à obtenir dans du fer et on en conclut que le circuit magnétique saturerait très fortement, ce qui ne correspond plus du tout à la linéarité attendue entre le courant et le flux. Il est donc évident que ce choix de nombre de spires ne permet pas d'aboutir à la réalisation d'une inductance constante.

7- Si le circuit magnétique bobiné forme une inductance de valeur  $L = 50 \text{ mH}$ , alors on peut écrire en notation complexe :  $\underline{V} = jL\omega I$

$$\text{En passant aux modules : } I = \frac{V}{L\omega} = \frac{230}{50 * 10^{-3} * 2\pi * 50} = 14.65A$$

Pour ne pas dépasser une densité de courant de  $5 \text{ A/mm}^2$ , il faut assurer la relation suivante

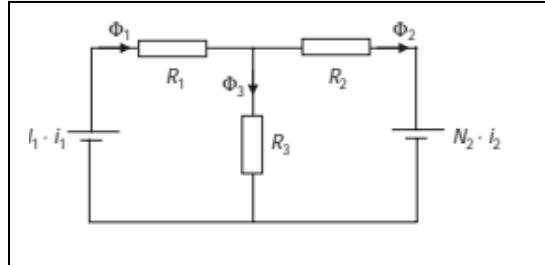
:

$$\frac{l_{max}}{S_{conducteurs}} < 5A/mm^2$$

Donc  $S_{cond-mini} = \frac{l_{max}}{5} = \frac{I\sqrt{2}}{5} = 4.14mm^2$

#### S.IV.6

1- On représente le schéma équivalent en analogie électrique sur la figure ci-dessous :



2-  $\phi_1 = \phi_2 + \phi_3$

3-  $\phi_2 = \frac{1}{R_2} N_1 i_1 \frac{R_2 // R_3}{R_1 + R_2 // R_3} = \frac{1}{R_2} N_1 i_1 \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3} = N_1 i_1 \frac{R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}$

4- De même  $\phi_3 = \frac{1}{R_3} N_1 i_1 \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3} = N_1 i_1 \frac{R_2}{R_1 \cdot R_2 + R \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3}$

5- L'inductance mutuelle M est définie comme le rapport du flux intercepté par le bobinage 2 ( $N_2$ ,  $\Phi_2$ ) par le courant  $i_1$ .

Ici :  $M = \frac{N_2 \Phi_2}{i_1} = N_1 N_2 \frac{R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}$ .

6- L'inductance demandée correspond au rapport du flux dans le tronçon 3 intercepté par le bobinage 1 par le courant  $i_1$ .

Ici :  $L_f = \frac{N_1 \phi_3}{i_1} = N_1^2 \frac{R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}$ . On alors écrira  $N_1 \phi_3 = L_f i_1$

7- La loi de Lenz permet d'écrire :  $V_1(t) = N_1 \frac{d\phi_1}{dt} = N_1 \frac{d(\phi_2 + \phi_3)}{dt} = N_1 \frac{d\phi_2}{dt} + L_f \frac{di_1}{dt}$

#### S.IV.7

Dans cet exercice, le matériau n'est pas linéaire, il est donc impossible d'utiliser la formule d'Hopkinson :  $NI = \mathcal{R} \Phi$ . Il est donc impératif de n'utiliser que le théorème d'Ampère appliqué aux circuits magnétiques simplifiés :  $NI = \int_c \vec{H} dl$  où c est le libre parcours moyen, c'est-à-dire en utilisant les hypothèses classiques :  $NI = \int_c H dl = HL$  où L est la longueur du circuit homogène.

1- On désire  $\phi = 2 \cdot 10^{-3}$  Wb, c'est à dire :  $B = \frac{\phi}{S} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-4}} = 1T$

On lit alors dans le tableau que le champ correspondant est :  $H = 760$  A/m.

Le théorème d'Ampère s'écrit alors :  $NI = H \cdot L$  c'est-à-dire que :

$$N_{min} = \frac{H \cdot L}{I_{max}} = \frac{760 \cdot 80 \cdot 10^{-2}}{20} = 30.4 \text{ soit donc : } 31 \text{ spires}$$

On considère donc à présent que  $N = 62$  spires.

2- L'apparition de l'entrefer rend le circuit magnétique non homogène. La décomposition de l'intégrale du théorème d'ampère se réduit à :  $NI = H_{acier} \cdot L \cdot H_{air} \cdot 2 \cdot e$

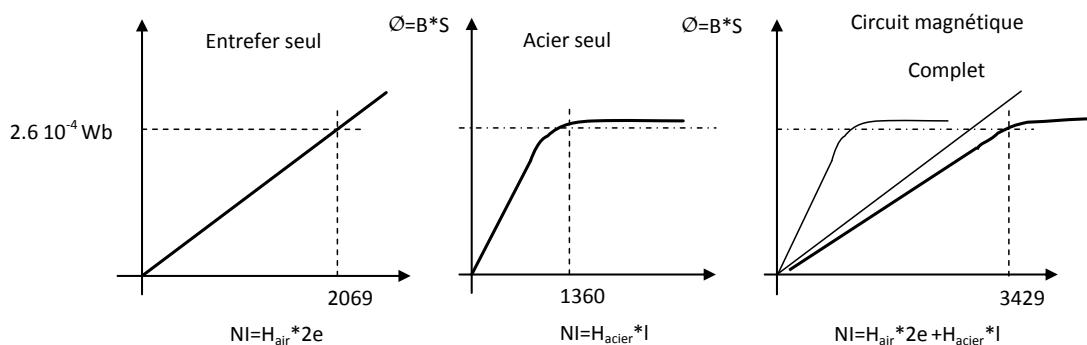
L'air représente un milieu linéaire dans lequel  $H_{air} = \frac{B}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi 10^{-7}} = 795.7 KA/m$

Dans l'acier, on lit toujours dans le tableau  $H_{acier} = 760 A/m$

On en déduit :  $I = \frac{H_{acier}L+H_{air}2.e}{N} = \frac{760*80*10^{-2} + 795.7 10^{-3} * 2 10^{-3}}{62} = 35.47 A$

Le courant étant limité à 20 A, il est nécessaire de prévoir un nombre de spires tel que  $NI = 35.47 * 62 = 2200$  avec  $I = 20 A$ . C'est-à-dire :  $N = 110$  spires

- 3- Il faut noter que le flux et l'induction sont proportionnels puisqu'on écrit : . De même, le champ magnétique et le courant sont également proportionnels puisque  $NI = H * L$ . Ainsi, les courbes  $B(H)$  ou  $\Phi(I)$  ont exactement les mêmes formes, mais évidemment pas les mêmes échelles. On représente ainsi sur la figure ci-dessous l'allure des courbes  $\Phi(H_{air}.L)$  et  $\Phi(H_{acier}.L)$  en fonction  $\Phi=B.S$ . les points correspondant à  $B=1.3T$  (c'est à dire  $\Phi=2.6 10^{-4} Wb$ ) sont cotés sur chaque dessin
- On en déduit l'allure de :  $NI = H_{acier} \cdot L + H_{air} \cdot 2.e$  qui caractérise les ampères tours en fonction de  $\Phi$  pour le circuit magnétique avec entrefer.
- On constate sur ces schémas de principe que l'entrefer a un effet dé-saturant sur la courbe d'aimantation du circuit magnétique.



#### S.IV.8

1- La grandeur  $\varepsilon$  représente la force magnéto motrice  $= N * I$

$$2- \mathcal{R}_1 = \frac{l_1}{\mu * S_1} = \frac{l_1}{\mu_r \mu_0 * S_1} = \frac{30 * 10^{-2}}{4\pi 10^{-7} * 1500 * 20 * 10^{-4}} = 79577 AT/Wb$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{l_2}{\mu * S_2} = \frac{l_2}{\mu_r \mu_0 * S_2} = \frac{10 * 10^{-2}}{4\pi 10^{-7} * 1500 * 20 * 10^{-4}} = 26525 At/Wb$$

$$\mathcal{R}_3 = \frac{l_3}{\mu * S_3} = \frac{l_3}{\mu_r \mu_0 * S_3} = \frac{30 * 10^{-2}}{4\pi 10^{-7} * 1500 * 20 * 10^{-4}} = 79577 At/Wb$$

3- Reluctance équivalente :  $\mathcal{R}_{equ} = \mathcal{R}_1 + \frac{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2} = 99470 At/Wb$

4- Nombre de spires suffisant à produire une inductance de 20 mH :

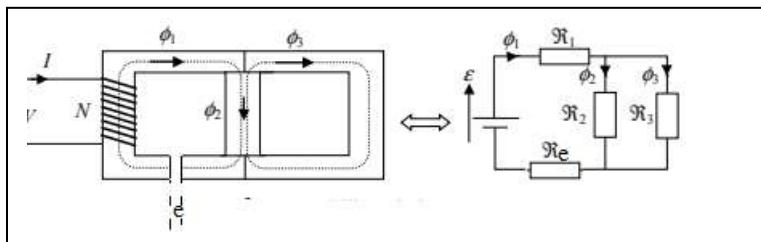
$$N = \sqrt{\mathcal{R}_{equ} * L} = 45 \text{ spires.}$$

$$5- V = 4.44 N B_{max} S.f$$

$$6- \underline{V} = jL\omega I \text{ cad } V = jL\omega I$$

$$7- I = \frac{4.44 N B_{max} S f}{L \omega} = 4.76 A$$

$$8- \mathcal{R}_1 = \frac{l_1}{\mu_r \mu_0 * S} + \frac{e}{\mu_0 * S} = 477464 \frac{At}{wb} \Rightarrow \mathcal{R}_{equ} = \mathcal{R}_1 + \frac{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2} = 497358 At/Wb$$



$$L = \frac{N^2}{R_{equ}} = 4mH \quad etI = \frac{4.44NB_{max}Sf}{L\omega} = 23.8A$$

Chapitre V

***Transformateur monophasé***

## V- TRANSFORMATEUR MONOPHASÉ

### V-1 GENERALTE DU TRANSFORMATEUR MONOPHASÉ

Chaque fois qu'on allume une lampe électrique ou qu'on démarre un moteur, il faut simultanément produire et transporter l'énergie. L'une des raisons principales du succès de l'électricité tient à ce qu'elle est très facilement transportable. Les transformateurs sont les liens indispensables entre les différentes parties du réseau national de distribution de l'énergie électrique.

*Schéma de principe du transformateur*

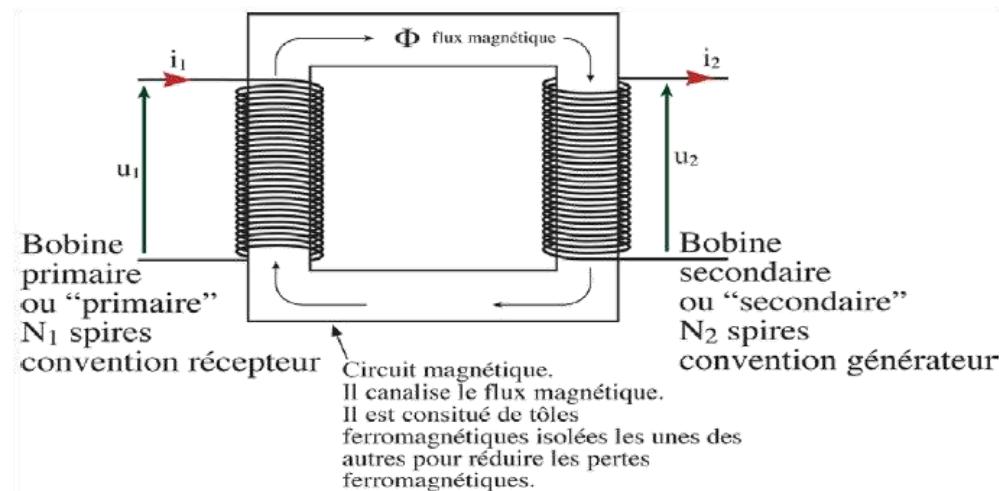


Figure V.1 schéma de principe d'un transformateur monophasé

a) *Symbol de un transformateur monophasé est*

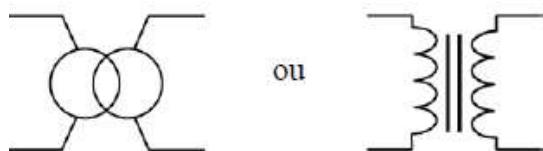


Figure V.2 symbole du transformateur

### V-2 TRANSFORMATEUR PARFAIT OU IDEAL

C'est un transformateur virtuel sans aucune perte, il est utilisé pour modéliser un transformateur réel. Dans un transformateur parfait, le rendement est de 100%.

On alimente le primaire par un générateur de tension sinusoïdale  $U_1$  qui débite un courant  $I_1$  et par conséquent le primaire sera considéré comme récepteur. La puissance au primaire est égale à  $U_1 I_1$ . Le secondaire génère une puissance égale à  $U_2 I_2$  pour un récepteur donné.

#### **a.1 - Transformateur à vide**

On ne branche pas de charge donc  $I_2 = 0$  et le transformateur sera équivalent à une bobine ferromagnétique.

$$U_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt} \text{ et } U_{20} = N_2 \frac{d\phi}{dt} \quad \text{D'où } \frac{U_{20}}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

#### **a.2-Transformateur en charge :**

Quand on branche un récepteur entre les bornes secondaires, un courant circule dans celui ci c'est à dire que  $I_2 \neq 0$ . En négligeant la chute de tension due au passage des courants  $I_1$  et  $I_2$  dans les résistances  $R_1$  et  $R_2$  du primaire et du secondaire, en supposant aussi que le même flux traverse la totalité des spires des deux enroulements, on a :

$$U_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt} \text{ et } U_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt} \quad \text{d'où } \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

Le champ magnétique, créé cette fois ci par la force magnétomotrice totale, est:

$$N_1 \cdot I_1 + N_2 \cdot I_2 = 0 \Rightarrow m = \frac{N_2}{N_1} = \frac{I_1}{I_2}$$

#### **a.3-Mise en équation :**

Le fonctionnement d'un transformateur parfait est régi par 3 équations :

*Au primaire :*

$$e_1 = -N_1 \frac{d\phi}{dt}, U_1 = -e_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt}$$

*Au secondaire :*

Le primaire étant alimenté par une tension sinusoïdale, alors le champ magnétique créé ainsi que le flux sont aussi sinusoïdaux. Ce champ magnétique va induire dans les  $N_2$  spires secondaires *f.e.m*

$$e_2 = -N_2 \frac{d\phi}{dt}, U_2 = -e_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

On ajoute aux deux équations précédentes la troisième équation suivante Au secondaire

$$m = \frac{N_2}{N_1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{I_1}{I_2}$$

#### **a.4- $m$ : le rapport de transformation.**

a-1 si  $m > 1$ , le transformateur est élévateur de tension abaisseur de courant ;

b-1 si  $m < 1$ , le transformateur est abaisseur de tension élévateur de courant.

c-1 si  $m = 1$ , le transformateur est dit isolateur.

Les transformateurs ont en général un bon rendement. Comme le transformateur est parfait, et que  $U_2 I_2 = U_1 I_1$  les puissances primaires sont totalement transmises au secondaire :

$$P_1 = P_2 ; Q_1 = Q_2 ; S_1 = S_2 ; \text{ et } \varphi_1 = \varphi_2.$$

### V-3 TRANSFORMATEUR REEL :

Le schéma équivalent d'un transformateur monophasé réel est le suivant :

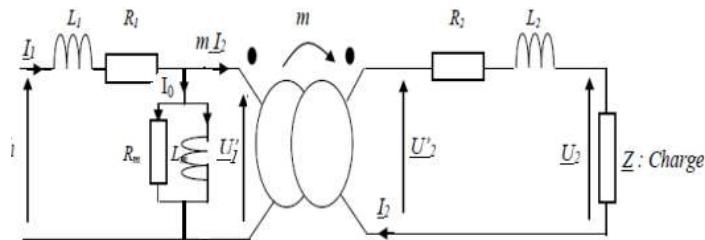


Figure V.3 transformateur monophasé réel

#### a.1- schémas équivalents

*Vu du secondaire :*

Le transformateur parfait vu du secondaire se comporte comme une source idéale de tension

De f.e.m  $U_2 = -m U_1$ .

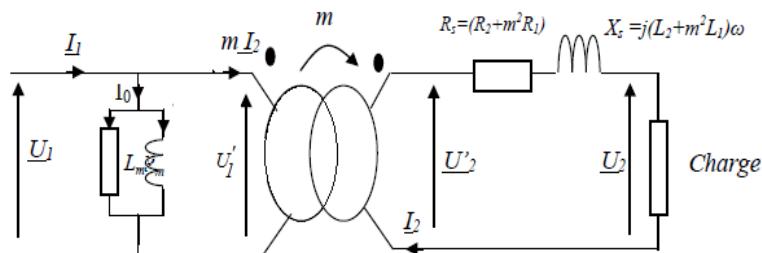


Figure V.4 transformateur vue du secondaire

Ce transformateur nécessite un courant magnétisant  $I_0$  pour créer le flux dans le circuit magnétique ; d'autre part il consomme des pertes fer par hystérésis et courant de Foucault

$$N_1 \bar{I}_1 = N_2 \bar{I}_2 + N_1 \bar{I}_{10}$$

Donc on ajoute des éléments qui tiennent compte de sa consommation en puissance active et en puissance réactive. La résistance  $R_m$  et l'inductance  $Lm$  présentent les pertes fer ou magnétiques. Le courant magnétisant  $I_0$  présente deux composantes :  $I_{0a}$  la composante active et  $I_{0r}$  la composante réactive.

$$\begin{cases} P_{Rm} = U'_1 I_0 \cos \varphi_0 = U'_1 I_{0a} \\ Q_m = U'_1 I_0 \sin \varphi_0 = U'_1 I_{0r} \end{cases}$$

Pour faciliter l'étude, on ramène le tout vers soit le primaire soit le secondaire.

- Ramener une impédance du secondaire vers le primaire à condition de la **diviser par  $m^2$** .

$$\begin{cases} R_p = R_2 + \frac{R_2}{m^2} \\ X_p = L_2 \omega + \frac{L_2 \omega}{m^2} \end{cases}$$

- Ramener une impédance du primaire vers le secondaire à condition de la multiplier par  $m^2$ .

$$\begin{cases} R_s = R_2 + R_1 m^2 \\ X_s = L_2 \omega + L_1 \omega m^2 \end{cases}$$

## **a 2 Détermination des caractéristiques du transformateur**

-*Essai à vide*

À vide le circuit secondaire est ouvert :  $I_2 = 0 \Rightarrow P_2 = 0$  et  $P_{J2} = 0$

En plus  $P_{10} = P_{J10} + P_{fer}$  autrement dit toute l'énergie absorbée au primaire est utilisée pour compenser les pertes fer  $P_{fer}$  et les pertes joules au primaire  $P_{J10}$ .

Finalement l'essai à vide donne :

$$P_{10} = P_{fer}$$

-*Essai en court circuit*

Le circuit secondaire est en court-circuit :  $U_2 = 0 \Rightarrow P_2 = 0$  donc toute l'énergie absorbée au primaire (la puissance mesurée  $P_{1cc}$ ) est utilisée pour compenser les pertes fer et les pertes joules.

$$P_j = R_1 I_1^2 + R_2 I_{2n}^2 \Rightarrow P_j = R_1 (m I_{2n})^2 + R_2 I_{2n}^2 = I_{2n}^2 (R_2 + R_1 m^2) = R_s I_{2n}^2$$

$$\text{D'une part } P_{1cc} = P_{mag} + P_j = \frac{U_{1cc}^2}{R_m} + (R_1 I_1^2 + R_2 I_{2n}^2)$$

$$\text{D'une part : } P_{1cc} = P_{mag} + P_j = \frac{U_{1cc}^2}{R_m} + (R_1 I_1^2 + R_2 I_{2n}^2)$$

$$\text{Or } I_{2n} \text{ est grand et } U_{1cc} \text{ faible } \Rightarrow P_{1cc} = R_s I_{2n}^2 = P_j \text{ d'où } R_s = \frac{P_{1cc}}{I_{2n}^2}$$

$$\text{En plus } (mU_{cc})^2 = (R_S I_{2n})^2 + (X_S I_{2n})^2 \Rightarrow X_S = \sqrt{\frac{(mU_{cc})^2}{I_{2n}^2} - R_S^2}$$

Bilan de puissance :  $P_{1cc} = P_j$

### - Transformateur en charge

Cet essai sert à calculer le rendement et la chute de tension du transformateur

#### c-3.1 Chute de tension :

Il a été constaté qu'il y a une chute de tension provoquée par la résistance du bobinage.

Autrement dit :  $U_2 < m.U_1$ .

Par définition, la chute de tension dans un transformateur est la différence des tensions secondaires à vide et en charge :  $\Delta U = U_{20} - U_2$ .

ou encore :

$$\Delta U_2 = R_S I_2 \cos \varphi_2 + L_s \omega I_2 \sin \varphi_2$$

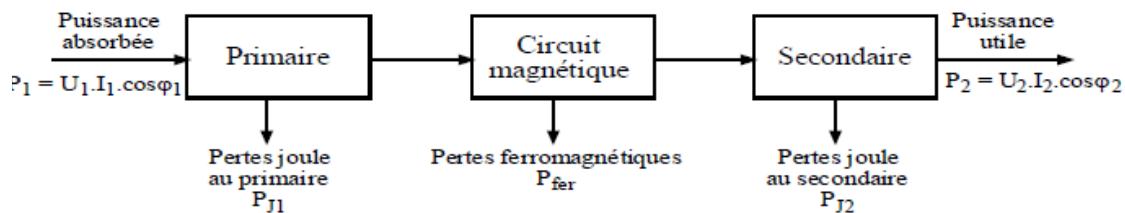
Plus  $I_2$  augmente (la charge augmente) plus  $U_2$  diminue. Si  $I_2$  augmente  $\Delta U$  augmente aussi.

En désignant par  $\varphi_2$  le déphasage de  $I_2$  en arrière de  $U_2$ ,  $\Delta U_2$  dépend beaucoup de  $\varphi_2$ :

- Si  $I_2$  est déphasé en arrière de  $U_2$ , les deux termes  $R_s I_2 \cos \varphi_2$  et  $L_s \omega I_2 \sin \varphi_2$  s'ajoutent.
- Si  $I_2$  est déphasé en avant, le second terme se soustrait du premier. Pour les déphasages importants,  $\Delta U_2$  est négatif, c'ds que  $U_2$  est supérieur à  $U_{20}$ .

## V-4 RENDEMENT DU TRANSFORMATEUR

Avant de donner l'expression du rendement, il est judicieux de présenter le bilan de puissance d'un transformateur réel :



Le bilan des puissances nous donne la relation :

$$P_1 = P_{j1} + P_{j2} + P_{fer} + P_2$$

Le rendement est le rapport de la puissance débitée par le secondaire  $U_2 I_2 \cos \varphi_2$  à la puissance entrant au primaire  $U_1 I_1 \cos \varphi_1$ . La différence est due aux pertes.

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_2 I_2 \cos \varphi_2}{U_1 I_1 \cos \varphi_1} = \frac{P_2}{P_2 + \sum \text{pertes}} = \frac{U_2 I_2 \cos \varphi_2}{U_2 I_2 \cos \varphi_2 + P_{mag} + P_J}$$

## *Exercices Chapitre V*

**V.1** Soit un transformateur parfait 380V/220V 50Hz de puissance apparente nominale  $S=2\text{ kVA}$ .

- 1- Calculer les courants nominaux  $I_{1N}, I_{2N}$  et le rapport de transformation  $m$ .
- 2- La charge inductive est constituée d'une résistance  $R=20\Omega$  en série avec une inductance=50mH. Calculer l'impédance de la charge et son facteur de puissance. En déduire les courants du transformateur et la puissance active fournie.

**V.2** Une transformatrice monophasé a les caractéristiques suivantes :

$S_{1N}=25\text{kVA}, P_{joules}=700\text{W}$  et  $P_{fer}=115\text{W}$ .

- 1- Calculer le rendement nominal pour :
  - Une charge résistive.
  - Une charge inductive de facteur de puissance 0.8.
- 2- Calculer le rendement pour :
  - Une charge résistive qui consomme la moitié du courant nominal.

**V.3** Un transformateur monophasé a les caractéristiques suivantes :

- Tension primaire nominale :  $U_{1N}=5375\text{V}/50\text{Hz}$ .
- Rapport du nombre de spires :  $N_2/N_1=0.044$  .
- Resistance de l'enroulement primaire :  $R_1=12\Omega$ .
- Resistance de l'enroulement secondaire :  $R_2=25\text{m}\Omega$ .
- Inductance de fuite du primaire  $L_1 = 50\text{mH}$ .
- Inductance de fuite du secondaire  $L_2 = 100\mu\text{H}$ .

- 1- Calculer la tension à vide au secondaire.
- 2- Calculer la résistance des enroulements ramenée au secondaire  $R_s$ .
- 3- Calculer l'inductance de fuite ramenée au secondaire  $L_s$ . En déduire la réactance de fuite  $X_s$ .

Le transformateur débite dans une charge résistive  $R=1 \Omega$

- 4- Calculer la tension aux bornes du secondaire  $U_2$  et le courant qui circule dans la charge  $I_2$ .

**V.4** Un transformateur de commande et de signalisation monophasée a les caractéristiques suivantes : 230V/24V,50Hz, 630VA,11,2 Kg.

- 1- Les pertes totales à charge nominale sont de 54.8 W..

Calculer le rendement nominal du transformateur pour  $\cos\phi_2 = 0.1$  et  $\cos\phi_1 = 0.3$

2- calculer le courant nominal au secondaire  $I_{2N}$  .

3- les pertes à vide (pertes fer) sont de 32.4 W.

En déduire les pertes joules à charge nominales.

En déduire, la résistance  $R_S$ , la résistance des enroulements ramenée au secondaire.

4- La chute de tension au secondaire pour  $\cos\phi_2 = 0.6$  (inductif) est de 3.5% de la tension nominale ( $U_{2N}=24V$ ). En déduire  $X_S$ , la réactance de fuite ramenée au secondaire.

#### V.5 Les essais d'un transformateur monophasé ont donné :

A vide :  $U_1= 220$  V, 50Hz (tension nominale primaire)  $U_{2V}=44V$  ;  $P_{1V}=80W$  ;  $I_{1V}=1A$ .

En courant continu au primaire :  $I_1=10A$  ;  $U_1=5V$ .

Le transformateur est considéré comme parfait pour les courants lorsque ceux-ci ont leurs valeurs nominales.

1- Déterminer le rapport a vide de transformation à vide  $m_v$  et le nombre de spires au secondaire, si l'on en compte 500 au primaire.

2- Calculer la résistance de l'enroulement primaire  $R_1$ .

3- Vérifier que l'on peut négliger les pertes par effet joule lors de l'essai a vide (pour cela, calculer les pertes joules au primaire).

4- En admettant que les pertes dans le fer sont proportionnelles au carre de la tension primaire, montrer quelles sont négligeables dans l'essai en court circuit. faire l'application numérique.

5- Représenter le schéma équivalent du transformateur en court circuit vu du secondaire .en déduire les valeurs  $R_S$  et  $X_S$ , caractérisant l'impédance interne.

Quelque soient les résultats obtenus précédemment, pour la suite du problème, on prendra  $R_S= 0.025 \Omega$  et  $X_S= 0.075\Omega$ .

Le transformateur, alimenté au primaire sous sa tension nominale, débite 100A au secondaire avec un facteur de puissance égal a 0.9(charge inductive).

6- Déterminer la tensions secondaire du transformateur. En déduire la puissance délivrée au secondaire.

7- Déterminer la puissance absorbée au primaire (au préalable calculer les pertes globales).en déduire le facteur de puissance au primaire et le rendement.

**V.6** Un transformateur monophasé est alimenté en courant alternatif 400 V 50 Hz. Il est constitué de 2 enroulements : l'enroulement primaire comporte 720 spires l'enroulement secondaire comporte 87 spires. On effectue un essai à charge nominale résistive. L'intensité mesurée au secondaire est alors de 13 A.

On effectue ensuite une mesure volt-ampère métrique en continu pour mesurer la résistance des enroulements primaire et secondaire : Au secondaire on obtient :  $U_2 = 1,55$  V ;  $I_2 = 13$  A. Au primaire on obtient :  $U_1 = 12$  V ;  $I_1 = 1,7$  A

1° Déterminer la tension nominale secondaire ?

2° Déterminer la puissance nominale du transformateur ?

3° Déterminer l'intensité nominale primaire ?

4° Quelle intensité et quelle puissance peut-il fournir au maximum à un moteur dont le facteur de puissance est 0,75 ?

5 ° Déterminer les résistances des enroulements primaire et secondaire ?

6° Déterminer la puissance perdue par effet Joule dans les enroulements ?

7 ° Proposer une plaque signalétique

### **Solution exercices chapitre V**

#### **S.V.1**

1-  $S_n = V_{1n} \times I_{1n} = V_{2n} \times I_{2n} \Rightarrow I_{1n} = \frac{S_n}{V_{1n}} = \frac{2000}{380} = 5.26 A$

$$I_{2n} = \frac{S_n}{V_{2n}} = \frac{2000}{220} = 9.09 A$$

$$m = \frac{V_{2n}}{V_{1n}} = 0.57$$

2- L'impédance de la charge :

$$Z_c = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} = 25.43 \Omega.$$

Facteur de puissance :

$$\tan \varphi = \frac{X_L}{R} = \frac{L\omega}{R} = \frac{50 \cdot 10^{-3} (2\pi 50)}{20} = 0.785$$

$$\Rightarrow \varphi = \tan^{-1} 0.785 = 38.14^\circ \Rightarrow \cos \varphi = 0.786$$

Les courants du transformateur et la puissance active :

$$I_1 = I_{1N} = 5.26 A,$$

$$I_2 = \frac{V_2}{Z_c} = \frac{220}{25.43} = 8.65 A,$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} \Rightarrow P = S \times \cos \varphi = 1572 W$$

#### **S.V.2**

1- Rendement

- charge resistive

$$P_2 = S_2 \cos \varphi_2.$$

Charge resistive:  $\cos \varphi_2 = 1 \Rightarrow P_2 = S_2 \times \cos \varphi_2 = 25000 \times 1 = 25 KW$

$$P_1 = P_2 + P_{jt} + P_{fer} = 25000 + 700 + 115 = 25.815 KW.$$

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{25}{25.815} = 96.8\%$$

- charge inductive

$$P_2 = S_2 \times \cos \varphi_2 = 25000 \times 0.8 = 20 KW$$

$$P_1 = P_2 + P_{jt} + P_{fer} = 20000 + 700 + 115 = 20.815 KW.$$

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{20}{20.815} = 96.08\%.$$

2- Pour la moitié du courant nominale pour une charge résistive

$$I_2 = I_{2N}/2 \text{ donc } P_2 = 12.5 KW.$$

Les pertes sont proportionnelle au carre des courants:  $700 * (1/2)^2 = 175 W$

$$P_1 = P_2 + P_{jt} + P_{fer} = 12500 + 175 + 115 =$$

Rendement

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{12.5}{20.815} = 96.08\%$$

#### **S.V.3**

1- Tension à vide au secondaire

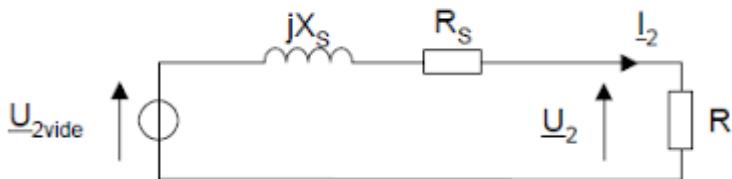
236.5V.

2-  $R_s = 48.2 \text{ m}\Omega$ .

3-  $L_s = 197 \text{ mH}$ .  $X_s = 61.8 \text{ m}\Omega$ .

Le transformateur débite dans une charge résistive  $R=1\Omega$ .

4-



$$Z = (R_s + R) + jX_s$$

$$I_2 = U_{2\text{vide}} / Z = 225.2 \text{ A}$$

$$U_2 = RI_2 = 225.2 \text{ Volt.}$$

$$\Delta U_2 = U_{2\text{v}} - U_2 = (R_s \cos \varphi_2 + X_s \sin \varphi_2) I_2.$$

$$\begin{aligned} \text{La charge résistive } \cos \varphi_2 &= 1 \text{ d'où } \Delta U_2 = R_s I_2 \\ \text{et } U_2 &= RI_2 \Rightarrow I_2 = 225.6 \text{ A. et } U_2 = 225.6 \text{ V.} \end{aligned} \quad (1)$$

#### S.V.4

$$1 - \cos \varphi_1 = 1 \Rightarrow (630 * 1) / (630 * 1 + 54.8) = 92\%$$

$$\cos \varphi_2 = 0.3 \Rightarrow (630 * 0.3) / (630 * 0.3 + 54.8) = 77.5\%$$

2-Courant nominal au secondaire  $I_{2N}$

$$I_{2N} = 26.25 \text{ A.}$$

$$3- P_{\text{fer}} = 32.4 \text{ W} = P_0$$

Pertes joules à charge nominale :

$$\text{Bilan puissance : } 54.8 - 32.4 = 22.4 \text{ W.}$$

$$\text{on déduit } R_s : 22.4 / 26.25^2 = 32.5 \text{ m}\Omega.$$

4- Chute de tension au secondaire

$$\Delta U_2 = 0.035 * 24 = 0.84 \text{ V.}$$

$$\Delta U_2 = (R_s \cos \varphi_1 + X_s \sin \varphi_1) I_{2N} \rightarrow X_s = 15.6 \text{ m}\Omega$$

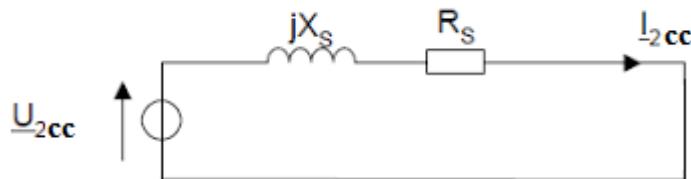
#### S.V.5

1-  $m_v = 0.2$ ;  $N_2 = 100$  spires.

2-  $R_1 = 0.5 \Omega$ .

3- Pertes joules au primaire =  $R_1 (I_{1V})^2 = 0.5 \text{ W} \ll 80 \text{ W}$  donc négligeable.

$$4- 80 * (40 / 220)^2 = 2.6 \text{ W} \ll 250 \text{ W.}$$



$$5- R_s = 250/100^2 = 0.025 \Omega; Z_s = m_v \cdot U_{1CC}/I_{2CC} = 0.080 \Omega; X_s = \sqrt{Z_s^2 - R_s^2} = 0.076 \Omega.$$

$$6- \Delta U_2 = 5.5V; U_2 = 38.5V.; P_2 = 3460W.$$

$$7- \text{Pertes globales} = 330W.$$

$$P_1 = 3790W.$$

$$\text{Rendement: } 3460/3790 = 91\%$$

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = U_1 m_v I_2 \cos \varphi_1$$

$$\cos \varphi_1 = 0.86$$

### S.V.6

On utilise les relations donnant le rapport de transformation :  $m = V_2 / V_1 = N_2 / N_1$ .

$$1- \text{On connaît } V_1, N_2, \text{ et } N_1 \text{ donc } V_2 = V_1 \times N_2 / N_1; V_2 = 400 \times 87 / 720 = 48.3 \text{ V}$$

$$2- \text{La puissance nominale du transformateur est celle pour laquelle le transformateur a été réalisé. Puissance apparente : } S_N = V_{2N} \times I_{2N}; S_N = 48.3 \times 13 = 630 \text{ VA valeur normalisée}$$

$$3- \text{On utilise la relation donnant la puissance apparente (en négligeant les pertes dans le transfo) } S_N = V_{1N} \times I_{1N}; I_{1N} = S_N / V_{1N}; I_{1N} = 630 / 400 = 1.57 \text{ A}$$

$$4- \text{L'intensité maximale fournie est l'intensité nominale : } I_{2N} = 630 / 48.3 = 13 \text{ A}$$

$$\text{La puissance maximale pour } \cos \varphi_2 = 0.75 \text{ est } P_2 = V_{2N} \cdot I_{2N} \cdot \cos \varphi_2 = 471 \text{ W}$$

$$5- \text{La résistance des enroulements est donnée par la mesure voltampèremétrique en continu } R_1 = V_1 / I_1 = 12 / 1.7 = 7 \Omega \text{ et } R_2 = V_2 / I_2 = 1.55 / 13 = 0.119 \Omega$$

$$6- \text{La puissance perdue par effet Joule est la puissance dissipée au primaire et au secondaire } P_{Joule} = P_{J1} + P_{J2} = R_1 \cdot I_{1N}^2 + R_2 \cdot I_{2N}^2 = P_{Joule} = 40.3 \text{ W}$$

7° La plaque signalétique donne les valeurs normalisées :

**Transformateur monophasé**  
 N° série :      Réf :  
 Fréquence : 50 Hertz  
 Tension : 400 V / 48 V  
 Puissance : 630 VA

### S.V.7

1- En utilisant le théorème de Boucherot :  $U_1 = 4,44 N_1 f SB$ , on en déduit :

$$N_1 = \frac{U_1}{4.44 f SB} = \frac{5000}{4.44 \times 60(10^{-2})^2 \times 50 \times 1.1} = 3413 \text{ spires.}$$

$$2- m = \frac{U_{20}}{U_1} = \frac{230}{5000} = 0.046 \text{ et } m = \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow N_2 = m N_1 = 0.046 \times 3413 = 157 \text{ spires}$$

$$3- P_{10} = P_F \text{ et } \cos \varphi_{10} = \frac{P_{10}}{U_1 I_{10}} = \frac{250}{5000 \times 0.5} = 0.1$$

$$4- S = U_{1n} I_{1n} = U_{20} I_{2n} \text{ soit } I_{2n} = \frac{S}{U_{20}} = \frac{21.10^3}{230} = 91.3 \text{ A}$$

$$5- R_s = \frac{P_{1CC}}{I_{2CC}^2} = \frac{300}{91.3^2} = 36 \text{ m}\Omega$$

$$Z_s = \frac{m U_{1CC}}{I_{2CC}} = 0.1 \Omega.$$

$$X_s = \sqrt{Z_s^2 - R_s^2} = \sqrt{0.1^2 - 0.036^2} = 94 \text{ m}\Omega.$$

- 6- Pour déterminer le rendement, il faut déjà déterminer la tension  $U_2$  aux bornes de la charge soit en utilisant la méthode graphique ( $\underline{U}_{2v} = R_s \cdot \underline{I}_2 + jX_s \cdot \underline{I}_2 + \underline{U}_2$ ) soit en utilisant l'expression approchée de la chute de tension :

$$\Delta U_2 = U_{20} - U_2 = R_s I_2 \cos \varphi_2 + X_s I_2 \sin \varphi_2$$

$$\Delta U_2 = 36 \cdot 10^{-3} \times 91.3 \times 0.83 + 94 \cdot 10^{-3} \times 91.3 \times \sin(\cos^{-1} 0.83) = 7.51V$$

On en deduit  $U_2$  :

$$U_2 = U_{20} - \Delta U_2 = 230 - 7.51 = 222.5V. \text{ on calcule ensuite } P_2 \text{ et } P_1 :$$

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2 = 222.5 \times 91.3 \times 0.83 = 16.86 \text{ kW} ;$$

$$P_1 = P_2 + P_F + P_c = 16.86 \cdot 10^3 + 250 + 300 = 17.41 \text{ kW et } \eta = \frac{P_2}{P_1} = 96.8 \%$$