



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

جامعة وهران 2 محمد بن احمد  
Université Oran 2 Mohamed Ben Ahmed

معهد الصيانة والأمن الصناعي  
Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle

**Polycopié de cours**

**Electrotechnique**

**Auteur : Dr BOUHAMRI Noureddine**

**2<sup>ème</sup> année Licence**

**2019/2020**

## AVANT PROPOS

L'électrotechnique est une discipline qui étudie les questions relatives à l'énergie électrique. Elle constitue aujourd'hui encore un bagage de base nécessaire pour des études supérieures et des activités professionnelles dans de nombreux secteurs. En effet, l'énergie électrique est de plus en plus présente dans les systèmes toujours plus sophistiqués et plus nombreux qui facilitent nos activités quotidiennes.

"**Electrotechnique (ELT)**" est une matière essentielle de l'unité fondamentale, assez vaste qui possède ses particularités, son langage propre, ses outils incontournables, et nécessite des bases solides en manipulation des circuits et des puissances électriques. Elle s'adresse aux étudiants de licence au premier semestre de la spécialité Electromécanique, Génie industriel et Hygiène-Sécurité industrielle du régime (LMD) ou généralement pour toute formation approfondie en électrotechnique. L'objectif est de développer les principes fondamentaux et analyse de tout type de circuits électriques

Le contenu de ce polycopié est présenté avec un style très simple qui permet aux étudiants une compréhension très rapide.

Ce polycopié traite un rappel mathématique détaillé sur les nombres complexes qui présentent un pilier très important dans l'analyse des circuits électriques en courant alternatif, avec un rappel sur les lois fondamentales de l'électricité avec un calcul de puissances électriques d'une part. D'autres parts, Afin de préparer les étudiants pour les futures années de spécialité (étude des machines électriques), une connaissance approfondie sur les circuits magnétiques a été évoquée, dont le but de comprendre le fonctionnement des transformateurs qui présentent un élément primordial dans le transport de l'énergie électrique, et la compréhension les machines électriques.

Enfin une bibliographie sommaire aidera le lecteur désireux d'en savoir plus à trouver les ouvrages qui ont contribué à l'élaboration de ce recueil de sujets et aux synthèses de cours. En définitive, cet ouvrage destiné aux étudiants des filières technologiques désirant préparer correctement leurs épreuves d'électrotechnique.

# Tables des matières



## Chapitre 1

### Rappels mathématiques sur les nombres complexes

1- Définitions.....	01
a-Égalité, addition et multiplication de deux nombres complexes.....	01
2- Forme algébrique ou cartésienne .....	01
3- Forme algébrique du nombre complexe .....	01
a- Définition .....	01
b- Conjugaison .....	02
c- Partie réelle ; partie imaginaire et partie pur .....	02
d- Module d'un nombre complexe.....	02
e- Argument d'un nombre complexe .....	03
f- Forme trigonométrique d'un nombre complexe .....	03
g- Relations entre forme algébrique et forme exponentielle.....	04
h- Forme exponentielle. Formules d'Euler. Formule de Moivre.....	04
i- Exemples .....	04
j- Plan complexe. Point image. Vecteur image .....	04
k- Opérations sur les nombres complexes.....	05
4- Exercices avec solutions .....	11
5-Application à l'électricité des nombres complexes .....	16

## Chapitre 2

### Rappels sur les lois fondamentales de l'électricité

A- Régime continu .....	17
a- Courant électrique.....	17
b- Effets du courant électrique .....	17
c- Cause d'un courant électrique.....	17
d- Polarité, sens du courant électrique .....	18
1- Dipôles électriques.....	20
a- Définition .....	20
b-Caractéristiques électriques .....	21

c- Générateurs et récepteurs .....	21
d- Equivalence entre générateur réel de tension et générateur réel de courant vu de l'extérieur .....	24
2- Exercices avec solutions .....	29
3- Condensateurs .....	33
a- Capacité d'un condensateur .....	33
b- Condensateur plan .....	34
4- Inductances .....	35
5- Régime transitoire .....	36
6- Exercices avec solutions .....	39
7- Association d'inductances .....	44
B- Régime harmonique .....	47
1- Représentation des grandeurs sinusoïdales : représentation vectorielle et notation imaginaire .....	47
2- Valeur moyenne d'un signal périodique .....	48
3- Valeur efficace d'un signal .....	49
4- Représentation de Fresnel .....	49

---

## Chapitre 3

## Circuits et puissances électriques

---

A- Circuits monophasés et puissances électriques .....	51
1- Loi d'Ohm en courant sinusoïdal, notion d'impédance .....	51
2- Puissances électriques en régime sinusoïdales .....	56
a- Puissance instantanée .....	56
b- Puissance active et puissance réactive .....	57
c- Puissance apparente .....	58
d- Puissance complexe .....	58
e- Exercices avec solutions .....	59
f- L'énergie réactive : définitions et rappels essentiels .....	60
g- Facteur de puissance .....	62
h- Théorème de Boucherot : conservation des puissances active et réactive .....	64
i- Exercices : puissances en alternatif monophasé .....	64
B- Systèmes triphasés .....	68
1- Tensions et courants polyphasés .....	68
a- Définition .....	68
b- Système triphasé .....	69
c- Relation entre tension simple et tension composée .....	70
d- Réseau équilibré .....	71
e- Puissance dissipée dans un montage triphasé .....	73
f- Mesure de puissance en triphasé .....	74

g- Méthode des deux wattmètres appliquée à des charges équilibrées.....	76
---	----

---

## Chapitre 4

## Circuits magnétiques

---

1- Historique.....	79
2- Lois fondamentales en électrotechnique .....	79
3- Flux magnétique.....	81
4- Exercices avec solutions .....	84
5- Magnétisation.....	85
6- Relation de Hopkinson.....	86

---

## Chapitre 5

## Transformateurs

---

1- Définition .....	88
2- Constitution.....	88
3- Le transformateur parfait (idéal) .....	89
4- Equations des tensions .....	89
5- Transformateur réel.....	90
6- Transformateurs particuliers .....	91
a- Autotransformateur .....	91
b- Transformateurs de mesures .....	93
c- Transformateur TT .....	93
d- Transformateur de tension .....	93
e- Le transformateur de courant à un seul enroulement TC.....	93
f- Transformateur d'impulsions.....	94
7- Convention.....	94

---

## Chapitre VI

## Introduction aux machines électriques

---

1- Présentation.....	95
2- Type de machines électriques tournantes.....	95
3- Lois de l'électromagnétisme .....	95
4- Description d'une machine électrique tournante.....	96

5- Rôles des éléments .....	97
6- La machine à courant continu .....	97
7- Les rails de Laplace : mise en mouvement .....	98
8- Fonctionnement de la machine .....	100
9- Bilan des puissances du moteur à courant continu.....	103
10- Démarrage du moteur à excitation séparée .....	103
11- Bilan de la machine à courant continu .....	104

Références Bibliographiques

## **Introduction**

L'électrotechnique est la partie de la physique qui regroupe les technologies de : Production, transport, transformation et exploitation (ou Consommation), dans laquelle on s'intéresse en priorité à l'aspect énergétique des systèmes rencontrés.

Avant tout, il faut saisir que l'énergie est un concept de la physique. il est possible de générer de l'électricité à partir de toutes les sources d'énergie et inversement.

De plus, avec l'électricité, la réversibilité, le transport, la transformation et le chiffage sont faciles à réaliser.

L'électricité ne se stocke pas, un défaut qui a des conséquences très importantes sur le fonctionnement des réseaux de production et de distribution d'énergie électrique. Quel que soit son type, toute énergie dépend du temps.

Il est alors très peu pratique de manipuler et de mesurer les quantités physiques puisqu'elles sont en perpétuelle expansion.

Il est beaucoup plus aisé de raisonner sur la quantité d'énergie par unité de temps, c'est ce qu'on appelle la puissance électrique.

En électrotechnique, étant donné la formulation des puissances électriques, il est nécessaire de pouvoir calculer, prévoir et maîtriser tous les courants, tensions et puissances d'un système afin de maîtriser les différentes énergies qui y sont mises en jeu.

Des rappels fondamentaux ont été rappelés avec soins, pour pouvoir bénéficier des connaissances préalables dans le domaine électrique et physique, et cela, pour l'intérêt majeur des étudiants dans leur formations universitaires et même professionnel futures.

# **Chapitre I : Rappels mathématiques sur les nombres complexes**

## Chapitre I : Rappels mathématiques sur les nombres complexes [1]

### 1- Définitions

#### a- Égalité, addition et multiplication de deux nombres complexes

On appelle nombre complexe tout couple ordonné  $(a, b)$  de  $\mathcal{R}^2$ . Un élément  $Z$  de l'ensemble  $\mathcal{C}$  des nombres complexes est représenté par  $Z = (a, b)$ .

On munit l'ensemble  $\mathcal{C}$  des couples ordonnés, d'une égalité, d'une addition et d'une multiplication définie de la façon suivante:

➤ **Egalité :**

$$\underline{Z} = \underline{Z}' \leftrightarrow (a, b) = (a', b') \rightarrow \begin{cases} a = a' \\ \text{et} \\ b = b' \end{cases} \quad (\text{I-1})$$

➤ **Addition :**

$$\underline{Z} + \underline{Z}' = \underline{Z}'' \leftrightarrow (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \rightarrow \begin{cases} a'' = a + a' \\ \text{et} \\ b'' = b + b' \end{cases} \quad (\text{I-2})$$

➤ **Multiplication**

$$\underline{Z} \cdot \underline{Z}' = \underline{Z}'' \leftrightarrow (a, b) \cdot (a', b') = (aa' + bb', ab' + a'b) \rightarrow \begin{cases} a'' = aa' + bb' \\ \text{et} \\ b'' = ab' + a'b \end{cases} \quad (\text{I-3})$$

### 2- Forme algébrique ou cartésienne

D'après les définitions de l'addition et de la multiplication nous avons :

$$\underline{Z} = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) \quad (\text{I-4})$$

En posant :

$$\begin{aligned} (a, 0) &= a; (b, 0) = b; \\ (0, 1) &= j \rightarrow j^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1 \end{aligned} \quad (\text{I-5})$$

Nous obtenons :

$$\underline{Z} = a + jb \quad (\text{I-6})$$

### 3- Forme algébrique du nombre complexe $\underline{Z}$

Dans cette forme,  $a$  et  $b$  sont des nombres réels et  $j$  est un nombre non réel tel que

$$j^2 = -1$$

#### a- Définition

Pour tout

$$\underline{Z} = a + jb \in \mathcal{C}, (a, b) \in \mathcal{R}^2$$

on définit le module  $|\underline{Z}|$  de  $\underline{Z}$  par :

$$|\underline{Z}| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (|\underline{Z}| \in \mathcal{R}_+) \quad (\text{I-7})$$

**b- Conjugaison**

Pour tout

$$\underline{Z} = a + jb \in \mathbb{C}, (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

on définit le conjugué  $\underline{Z}^*$  de  $\underline{Z}$  par :

$$\underline{Z}^* = a - jb$$

**c- Partie réelle ; partie imaginaire et partie pur****➤ Définition**

Pour tout  $\underline{Z} = a + jb \in \mathbb{C}, (a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on définit :

$R_e(z) = a$  la partie réelle de  $\underline{Z}$

$I_m(z) = b$  la partie imaginaire de  $\underline{Z}$

Lorsque  $b = 0$  ;  $\underline{Z} = a$ , est un réel et lorsque  $a = 0$  ;  $\underline{Z} = jb$ , est appelé imaginaire pur.

**d- Module d'un nombre complexe****➤ Définition**

Pour tout

$$\underline{Z} = a + jb \in \mathbb{C}, (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

on définit le module  $|\underline{Z}|$  de  $\underline{Z}$  par :

$$|\underline{Z}| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (|\underline{Z}| \in \mathbb{R}_+)$$

**➤ Exemple**

Soit :

$$\underline{Z}_1 = 1 - j3 \text{ et } \underline{Z}_2 = -2 + j5$$

d'où

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = (1 - j3) \cdot (-2 + j5) = 13 + j11$$

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{1 - j3}{-2 + j5} = \frac{(1 - j3)(-2 - j5)}{(1 - j3)(-2 - j5)} = \frac{-17 + j}{29}$$

$$|\underline{Z}_1| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} ; |\underline{Z}_2| = \sqrt{(-2)^2 + (5)^2} = \sqrt{29}$$

$$|\underline{Z}_1 \underline{Z}_2| = \sqrt{13^2 + 11^2} = \sqrt{290} = \sqrt{10} \sqrt{29} = |\underline{Z}_1| |\underline{Z}_2|$$

$$\left| \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \right| = \frac{1}{29} \sqrt{(-17)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{290}}{29} = \frac{\sqrt{10} \sqrt{29}}{\sqrt{29} \sqrt{29}} = \frac{|\underline{Z}_1|}{|\underline{Z}_2|}$$

**e- Argument d'un nombre complexe****➤ Définition**

Pour tout  $\underline{Z} = a + jb \in \mathbb{C}^*$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on définit un réel  $\theta$ , modulo  $2\pi$ , appelé **argument** de  $\underline{Z}$  et noté  $\arg \underline{Z}$  tel que :

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad ; \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a}$$

**➤ Exemple**

Soit les nombres complexes  $\underline{Z} = 1 + j$  et  $\underline{Z}' = \frac{-\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}$

Pour  $\underline{Z}$ , argument  $\theta$  est tel que :

$$\cos \theta = \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

d'où

$$\arg \underline{Z} = \theta = \frac{\pi}{4}$$

Pour  $\underline{Z}'$ , argument  $\theta'$  sera défini par :  $\cos \theta' = \frac{-\sqrt{3}}{2}$  et  $\sin \theta' = \frac{1}{2}$

d'où :  $\arg \underline{Z}' = \frac{5\pi}{6}$

**f- Forme trigonométrique d'un nombre complexe****➤ Définition**

Pour tout

$$\underline{Z} = a + jb \in \mathbb{C}^*, (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

On définit la forme trigonométrique de  $\underline{Z}$  par :

$$\underline{Z} = \rho(\cos \theta + j \sin \theta) \tag{I-8}$$

Avec

$$\rho = |\underline{Z}| \quad \text{et} \quad \theta = \arg \underline{Z}$$

**➤ Exemple**

Soit les nombres complexes :  $\underline{Z}_1 = -1 - j$  ;  $\underline{Z}_2 = \sqrt{3} - j$

Modules :  $|\underline{Z}_1| = \sqrt{2}$  ;  $|\underline{Z}_2| = 2$

Argument :  $\arg \underline{Z}_1 = \frac{5\pi}{4}$  et  $\arg \underline{Z}_2 = \frac{\pi}{6}$

**➤ Formes trigonométriques**

$$\underline{Z}_1 = \sqrt{2} \left[ \cos \frac{5\pi}{4} + j \sin \frac{5\pi}{4} \right]$$

$$\underline{Z}_2 = 2 \left[ \cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6} \right]$$

**g- Relations entre forme algébrique et forme trigonométrique**

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a} \quad (\theta + 2k\pi; k \in \mathbb{Z})$$

**h- Forme exponentielle. Formules d'Euler. Formule de Moivre****➤ Définition**

Pour tout :  $\theta \in \mathbb{R}$  ;

$$\text{on pose : } e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \quad (\text{I-9})$$

$e^{j\theta}$  : désigne donc le nombre complexe de module 1 ( $|e^{j\theta}| = 1$ )  
et d'argument  $\theta$  ( $\operatorname{arg} e^{j\theta} = \theta$ )

**➤ Exemple**

$$e^{j0} = 1; e^{j\pi/2} = j; e^{j\pi} = -1; e^{j3\pi} = -j$$

- Pour tout nombre complexe  $\underline{z} \in \mathbb{C}^*$  de module  $\rho$  et d'argument  $\theta$  nous posons :

$$z = \rho(\cos\theta + j\sin\theta) = \rho e^{j\theta}$$

qui est appelée forme exponentielle de  $\underline{z}$ .

**➤ Remarque :**

La notation exponentielle permet de transformer les règles de calcul sur le produit et le quotient en règles de calcul sur les puissances.

**i- Exemples****➤ Formule de MOIVRE**

$$(\cos\theta + j\sin\theta)^3 = (\cos 3\theta + j\sin 3\theta)$$

$$\text{Or: } (\cos\theta + j\sin\theta)^3 = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta + j(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)$$

$$\text{d'où : } \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \text{ et } \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

**➤ Formules d'EULER****➤**

$$\cos^3\theta = \frac{1}{4} \left( \frac{e^{j3\theta} + e^{-j3\theta}}{2} + \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \right) = \frac{1}{4} (\cos 3\theta + 3\cos\theta)$$

$$\sin^3\theta = \left( \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \right)^3 = \frac{1}{4} \left( 3 \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} - \frac{e^{j3\theta} - e^{-j3\theta}}{2j} \right) = \frac{1}{4} (3\sin\theta - \sin 3\theta)$$

**j- Plan complexe. Point image. Vecteur image**

Soit  $\vec{P}$  le plan vectoriel euclidien rapporté à la base orthonormée  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  et soit P le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Les applications, dans lesquelles  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

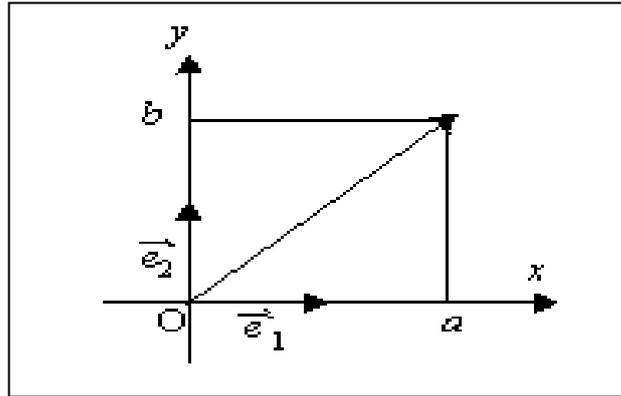


Figure I.1. Représentation du point et du vecteur dans le plan euclidien.

$$\vec{f} \mathbb{C} \rightarrow \vec{P}; \quad \underline{Z} = a + jb \rightarrow \vec{V} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2. \quad (\text{I-10})$$

et

$$f \mathbb{C} \rightarrow P$$

$$\underline{Z} = a + jb \rightarrow M \text{ (avec } \overrightarrow{OM} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 \text{)} \text{ sont des bijections.}$$

On dit que  $\vec{V} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$  est le **vecteur image** du complexe  $\underline{Z} = a + jb$  dans le plan vectoriel euclidien  $\vec{P}$  rapporté à la base orthonormée  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

De même  $M$  avec  $\overrightarrow{OM} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$  est le **point image** du complexe  $\underline{Z} = a + jb$  dans le plan affine euclidien  $P$  rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

**Réciproquement** : Pour tout  $\underline{Z} = a + jb \in \mathbb{C}$ , on dit que le complexe  $\underline{Z} = a + jb$  est :

- l'affixe du vecteur  $\vec{V}$  par l'application  $f^{-1}(\vec{V})$  pour tout  $\vec{V} \in \vec{P}$
- l'affixe du point  $M$  par l'application  $f^{-1}(M)$  pour tout  $M \in P$ .

Le **plan  $P$**  est appelé le "**plan complexe**".

L'**axe des abscisses** représente l'**ensemble des réels**.

L'**axe des ordonnées** représente l'**ensemble des imaginaires purs  $j\mathbb{R}$** .

## k- Opérations sur les nombres complexes

### - Egalité

Le choix de la forme des nombres complexes est guidé par la simplicité des calculs à effectuer dans les diverses opérations.

Posons :

$$\underline{Z} = a + jb = \rho(\cos\theta + j\sin\theta) = \rho e^{j\theta}, \overrightarrow{OM} \text{ vecteur-image de } \underline{Z}$$

$$\underline{Z}' = a' + jb' = \rho'(\cos\theta' + j\sin\theta') = \rho' e^{j\theta'}, \overrightarrow{OM}' \text{ vecteur-image de } \underline{Z}'$$

$$\underline{Z}'' = a'' + jb'' = \rho''(\cos\theta'' + j\sin\theta'') = \rho'' e^{j\theta''}, \overrightarrow{OM}'' \text{ vecteur-image de } \underline{Z}''$$

Les formes trigonométrique et exponentielle s'expriment en **repérage polaire** par  $(\rho, \theta)$  sont dites aussi **formes polaires**.

➤ **Egalité "algébrique "**

$$\underline{Z}' = \underline{Z}'' \leftrightarrow a' + jb' = a'' + jb'' \leftrightarrow \begin{cases} a' = a'' \\ b' = b'' \end{cases}$$

➤ **Egalité "polaire"**

$$\underline{Z}' = \underline{Z}'' \leftrightarrow \rho'(\cos\theta' + j\sin\theta') = \rho''(\cos\theta'' + j\sin\theta'') \leftrightarrow \begin{cases} \rho' = \rho'' \\ \theta' = \theta'' + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

➤ **Egalité "vecteur-image"**

$$\underline{Z}' = \underline{Z}'' \leftrightarrow \overrightarrow{OM}' = \overrightarrow{OM}''$$

➤ **Conclusion**

Deux nombres complexes sont égaux s'ils ont :

- même partie réelle et même partie imaginaire
- ou : même module et même argument
- ou : même vecteur-image

- **Addition**➤ **Addition "algébrique"**

$$\underline{Z} = \underline{Z}' + \underline{Z}'' \leftrightarrow a + jb = (a' + jb') + (a'' + jb'') = (a' + a'') + j(b' + b'') \begin{cases} a = a' + a'' \\ b = b' + b'' \end{cases}$$

➤ **Addition "polaire"**

$$\underline{Z} = \underline{Z}' + \underline{Z}'' \leftrightarrow \rho(\cos\theta + j\sin\theta) = \rho'(\cos\theta' + j\sin\theta') + \rho''(\cos\theta'' + j\sin\theta'') \\ = (\rho'\cos\theta' + \rho''\cos\theta'') + j(\rho'\sin\theta' + \rho''\sin\theta'')$$

Par identification :

$$\begin{aligned} \rho\cos\theta &= \rho'\cos\theta' + \rho''\cos\theta'' \\ \rho\sin\theta &= \rho'\sin\theta' + \rho''\sin\theta'' \end{aligned}$$

En élevant au carré et en sommant :

$$\rho^2 = \rho'^2 + \rho''^2 + 2\rho'\rho''\cos(\theta' - \theta'') \rightarrow \rho\sqrt{\rho'^2 + \rho''^2 + 2\rho'\rho''\cos(\theta' - \theta'')}$$

Le quotient des expressions précédentes conduit à :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\rho'\sin\theta' + \rho''\sin\theta''}{\rho'\cos\theta' + \rho''\cos\theta''} \rightarrow \theta = \operatorname{arctg} \frac{\rho'\sin\theta' + \rho''\sin\theta''}{\rho'\cos\theta' + \rho''\cos\theta''}$$

➤ **Addition "vecteur-image"**

$$\underline{Z} = \underline{Z}' + \underline{Z}'' \leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}' + \overrightarrow{OM}''$$

Le "vecteur-image"  $\overrightarrow{OM}$  est égal à la somme vectorielle des "vecteurs-images"  $\overrightarrow{OM}'$  et  $\overrightarrow{OM}''$  et représentatifs des nombres complexes  $\underline{Z}'$  et  $\underline{Z}''$ .

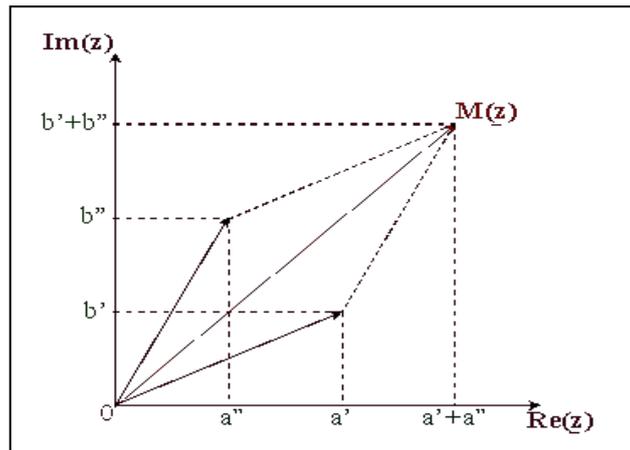


Figure I.2. Addition de vecteurs

De la relation vectorielle nous tirons :  $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{M''O} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M''M}$   
 donc à un vecteur de plan complexe  $\overrightarrow{M''M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM''}$  on associe l'affixe  $\underline{Z}' = \underline{Z} - \underline{Z}''$  (l'affixe de l'extrémité moins affixe de l'origine de ce vecteur)

**Remarque :** La soustraction se fait par l'addition du nombre complexe opposé. L'opposé de

$$\underline{Z} = a + jb = \rho e^{j\theta}$$

Etant

- $-\underline{Z} = -a - jb$  pour la forme algébrique
- $-\underline{Z} = \rho e^{j(\theta+\pi)}$  pour la forme polaire

### ➤ Conclusion

L'addition de deux nombres complexes sera facilitée, par l'utilisation de la forme algébrique :

- Addition des parties réelles
- Addition des parties imaginaires

### ➤ Exemple

Soient les nombres complexes  $\underline{Z}_1 = -1 - j$  et  $\underline{Z}_2 = \sqrt{3} + j$  (formes algébriques)

$$\underline{Z}_1 = \sqrt{2} \left[ \cos \frac{5\pi}{4} + j \sin \frac{5\pi}{4} \right]$$

et (formes trigonométriques)

$$\underline{Z}_2 = 2 \left[ \cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6} \right]$$

- **Addition "algébrique" :**

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = (-1 - j) + \sqrt{3} + j = -1 + \sqrt{3}$$

- **Addition "polaire"**

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 &= \left( \sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{4} + 2 \cos \frac{\pi}{6} \right) + \left( \sqrt{2} \sin \frac{5\pi}{4} + 2 \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \sqrt{2} \left( \frac{-\sqrt{2}}{2} \right) + 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + j \left( \sqrt{2} \left( \frac{-\sqrt{2}}{2} \right) + 2 \cdot \frac{1}{2} \right) = -1 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

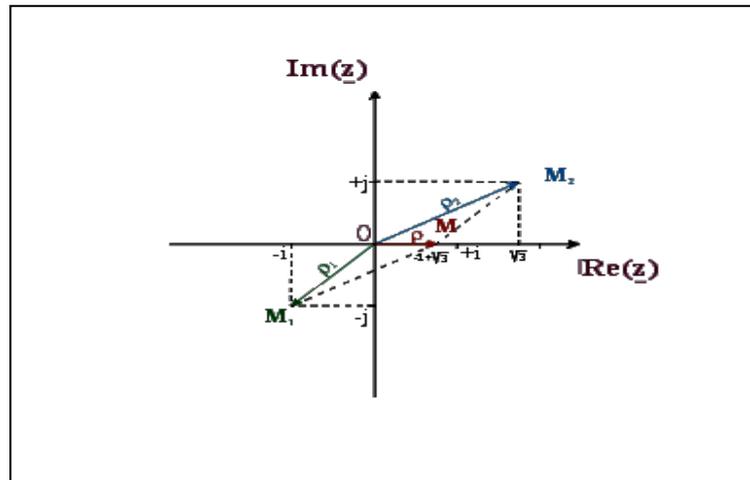
- **Addition "vectorielle":**

Figure I.3. Addition vectorielle

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$$

- **Multiplication**➤ **Multiplication "algébrique"**

$$\underline{Z} = \underline{Z}' \cdot \underline{Z}'' \leftrightarrow a + jb = (a' + jb')(a'' + jb'') = (a'a'' - bb'') + j(a'b'' + a''b') \rightarrow \begin{cases} a = a'a'' - b'b'' \\ \text{et} \\ b = a'b'' + a''b' \end{cases}$$

➤ **Multiplication "polaire"**

$$\begin{aligned} \underline{Z} = \underline{Z}' \cdot \underline{Z}'' &\leftrightarrow \rho(\cos\theta + j\sin\theta) = \rho'(\cos\theta' + j\sin\theta') \cdot \rho''(\cos\theta'' + j\sin\theta'') \\ &= \rho\rho''[(\cos\theta'\cos\theta'' - \sin\theta'\sin\theta'') + j(\sin\theta'\cos\theta'' + \cos\theta'\sin\theta'')] \\ &= \rho\rho''[\cos(\theta' + \theta'') + j\sin(\theta' + \theta'')] \end{aligned}$$

Soit :

$$\rho e^{j\theta} = \rho' e^{j\theta'} \rho'' e^{j\theta''} = \rho' \rho'' e^{j(\theta' + \theta'')} \leftrightarrow \begin{cases} \rho = \rho' \rho'' \\ \theta = \theta' + \theta'' \end{cases} \quad (I.11)$$

➤ **Multiplication "vecteur-image"**

A la vue du résultat de la forme polaire, multiplier le nombre  $\underline{Z}'$ , de vecteur-image  $\overrightarrow{OM}'$  par un nombre complexe  $\underline{Z}''$  de module  $\rho''$  et d'argument  $\theta''$  revient à effectuer sur le "vecteur-image" une rotation d'angle  $\theta''$  et une multiplication de son module par  $\rho''$ .

$$\underline{Z} = \underline{Z}' \cdot \underline{Z}'' \leftrightarrow \begin{cases} \underline{Z}' \text{ de vecteur - image } \overrightarrow{OM}' (\rho', \theta') \\ \underline{Z}'' \text{ de vecteur - image } \overrightarrow{OM}'' (\rho'', \theta'') \end{cases}$$

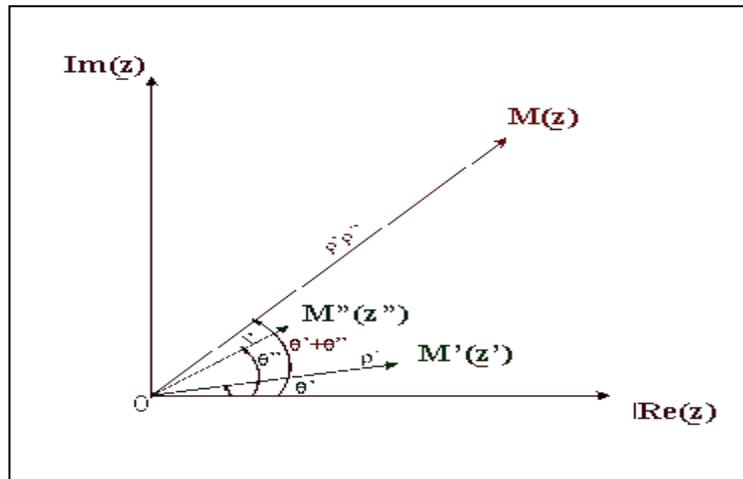


Figure I.4. Multiplication de vecteur image

➤ **Conclusion**

L'utilisation de la forme polaire est préférable dans le cas de la multiplication de deux nombres complexes :

- Multiplication des modules
- Addition des arguments

➤ **Exemple**

Soient les nombres complexes :

$$\underline{Z}_1 = -1 - j \quad ; \quad \underline{Z}_2 = \sqrt{3} + j \quad (\text{formes algébriques})$$

et

$$\underline{Z}_1 = \sqrt{2} \left[ \cos \frac{5\pi}{4} + j \sin \frac{5\pi}{4} \right] \quad (\text{formes trigonométriques})$$

$$\underline{Z}_2 = 2 \left[ \cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6} \right]$$

➤ Multiplication "algébrique":

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = (-1 - j)(\sqrt{3} + j) = 1 - \sqrt{3} - j(1 + \sqrt{3})$$

➤ Multiplication "polaire":

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + j \sin \frac{5\pi}{4} \right) \cdot 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( \frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) + j \sin \left( \frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \right] \\ &= 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( \frac{17\pi}{12} \right) + j \sin \left( \frac{17\pi}{12} \right) \right] \end{aligned}$$

- Multiplication "vectorielle":

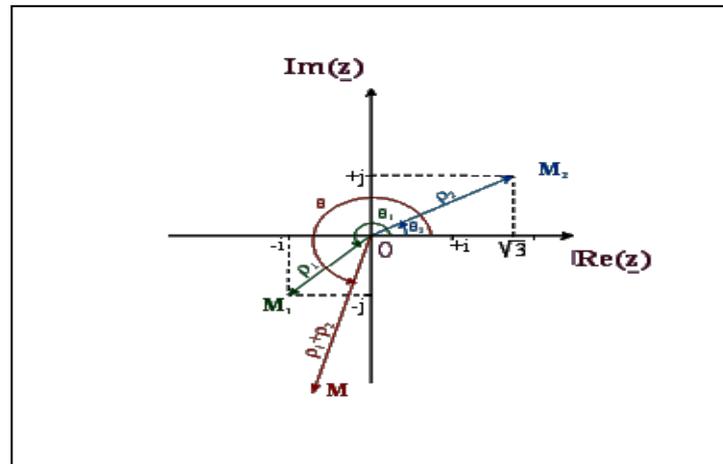


Figure I.5. Multiplication de vecteurs

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = \begin{cases} \rho = \rho_1 \rho_2 = 2\sqrt{2} \\ \theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{17\pi}{12} \end{cases}$$

- **Division**

- **Division algébrique**

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}''} \leftrightarrow a + jb = \frac{a' + jb'}{a'' + jb''} = \frac{(a' + jb')(a'' - jb'')}{(a'' + jb'')(a'' - jb'')} = \frac{(a'a'' + b'b'') + j(a''b' - a'b'')}{a''^2 + b''^2}$$

$$= \begin{cases} a = \frac{a'a'' + b'b''}{a''^2 + b''^2} \\ b = \frac{a''b' - a'b''}{a''^2 + b''^2} \end{cases}$$

- **Division "polaire"**

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}''} \leftrightarrow \rho e^{j\theta} = \frac{\rho' e^{j\theta'}}{\rho'' e^{j\theta''}}$$

$$= \frac{\rho'}{\rho''} e^{j(\theta' - \theta'')} \leftrightarrow \begin{cases} \rho = \frac{\rho'}{\rho''} \\ \theta = \theta' - \theta'' \end{cases}$$

- **Division "vecteur-image"**

Des résultats de la division "polaire", diviser le nombre complexe  $\underline{Z}'$ , de vecteur-image  $\overrightarrow{OM}$  par le nombre complexe  $\underline{Z}''$  de module  $\rho''$  et d'argument  $\theta''$  consiste à faire subir au "vecteur-image"  $\overrightarrow{OM}$  une rotation d'angle  $-\theta''$  et une division de son module par  $\rho''$ .

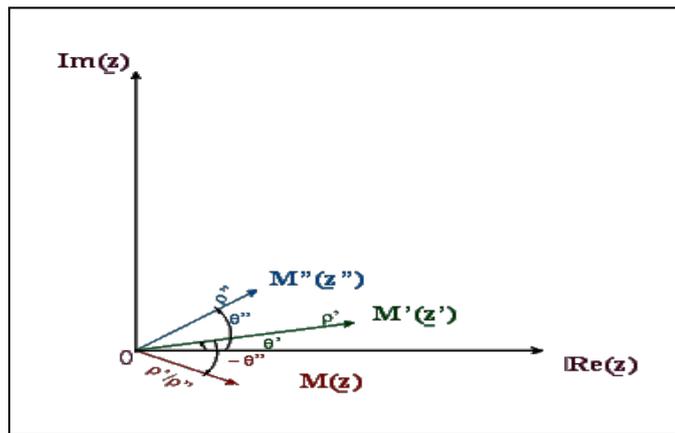


Figure 1.6. Division de vecteur image

- **Conclusion**

De nouveau la forme polaire est préférée dans le cas de la division de deux nombres complexes

- Division des modules
- Soustraction des arguments
- Division "vecteur-image"

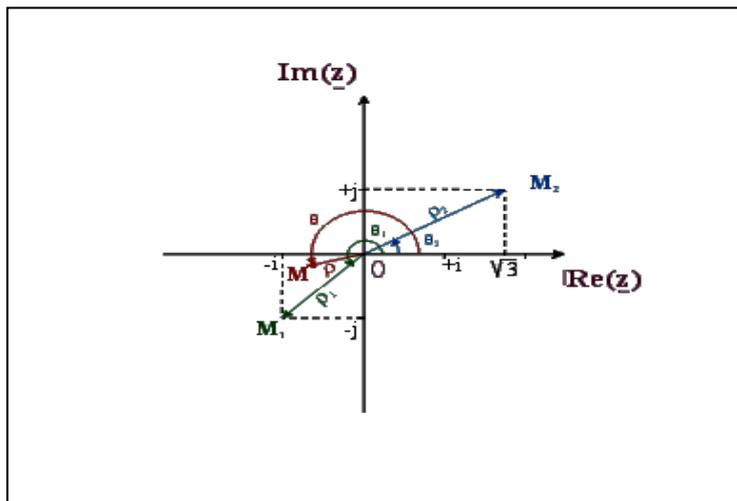


Figure 1.7. Division vecteur image

4- **Exercices avec solutions**

- Forme algébrique d'un nombre complexe

○ **Exercice 1 :**

○

Représenter, dans le plan complexe, les images  $M_i$  des nombres complexes  $\underline{Z}_i$  suivants :

$\underline{Z}_1 = 2; \underline{Z}_2 = -3; \underline{Z}_3 = +4j; \underline{Z}_4 = -j$

$\underline{Z}_5 = -2 - 3j; \underline{Z}_6 = 3 + 4j; \underline{Z}_7 = -1 + 2j; \underline{Z}_8 = 3 - j$

○ **Solution 1 :**

Nous obtenons les résultats suivants :

$$\begin{aligned}\underline{Z}_1 &= \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 = (+4j) + (-2 - 3j) = -2 + j \\ \underline{Z}_2 &= \underline{Z}_4 - \underline{Z}_6 = (-j) - (3 + 4j) = -3 - 5j \\ \underline{Z}_3 &= \underline{Z}_5 \cdot \underline{Z}_6 = (-2 - 3j)(3 + 4j) = 6 - 17j \\ \underline{Z}_4 &= \underline{Z}_5^3 = (-2 - 3j)^3 = -(8 + 36j - 54 - 27j) = 46 - 9j \\ \underline{Z}_5 &= \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{4j} = \frac{j}{4j^2} = -\frac{j}{4} \\ \underline{Z}_6 &= \frac{1}{\underline{Z}_5} = \frac{1}{(3 + 4j)} = \frac{(3 - 4j)}{(3 + 4j)(3 - 4j)} = \frac{1}{25}(3 - 4j) \\ \underline{Z}_7 &= \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_7} = \frac{-j}{-1 + 2j} = \frac{-j(-1 - 2j)}{(-1 + 2j)(-1 - 2j)} = \frac{-2 + j}{5} \\ \underline{Z}_8 &= \frac{\underline{Z}_7}{\underline{Z}_8} = \frac{-1 + 2j}{3 - j} = \frac{(-1 + 2j)(3 + j)}{(3 - j)(3 + j)} = \frac{-1 + j}{2}\end{aligned}$$

○ **Exercice 2 :**

A partir des nombres complexes  $\underline{Z}_i$  de la question précédente, mettre sous la forme Algébrique( $a + jb$ ) chacun des nombres complexes suivants :

$$\begin{aligned}\underline{Z}_1 &= \underline{Z}_3 + \underline{Z}_5 ; \underline{Z}_2 = \underline{Z}_4 - \underline{Z}_6 ; \underline{Z}_3 = \underline{Z}_5 \cdot \underline{Z}_6 ; \underline{Z}_4 = \underline{Z}_5^3 \\ \underline{Z}_5 &= \frac{1}{\underline{Z}_3} ; \underline{Z}_6 = \frac{1}{\underline{Z}_6} ; \underline{Z}_7 = \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_7} ; \underline{Z}_8 = \frac{\underline{Z}_7}{\underline{Z}_8}\end{aligned}$$

○ **Solution2 :**

○

Nous obtenons les résultats suivants :

$$\begin{aligned}\underline{Z}_1 &= \underline{Z}_3 + \underline{Z}_5 = -2 + j \\ \underline{Z}_2 &= \underline{Z}_4 - \underline{Z}_6 = -3 - 5j \\ \underline{Z}_3 &= \underline{Z}_5 \cdot \underline{Z}_6 = 6 - 17j \\ \underline{Z}_4 &= \underline{Z}_5^3 = 46 - 9j \\ \underline{Z}_5 &= \frac{1}{\underline{Z}_3} = -\frac{j}{4} \\ \underline{Z}_6 &= \frac{1}{\underline{Z}_6} = \frac{1}{25}(3 - 4j) \\ \underline{Z}_7 &= \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_7} = \frac{-2 + j}{5} \\ \underline{Z}_8 &= \frac{\underline{Z}_7}{\underline{Z}_8} = \frac{-1 + j}{2}\end{aligned}$$

○ **Exercice 3 :**

Soient  $\underline{z}$  et  $\underline{z}'$  deux nombres complexes de module 1 et  $a$  un nombre réel.

Posons  $\underline{Z} = \underline{z} + \underline{z}' + a\underline{z}\underline{z}' + 1$  et  $\underline{Z}' = \underline{z} + \underline{z}' + \underline{z}\underline{z}' + a$

Montrer que  $\underline{Z} = \underline{z}\underline{z}'\underline{Z}^*$  et que  $|\underline{Z}| = |\underline{Z}^*|$

○ **Solution 3 :**

Calcul du conjugué de :  $\underline{Z}'$

$$\underline{Z}^{**} = (\underline{z} + \underline{z}' + \underline{z}\underline{z}' + a)^* = \underline{z}^* + \underline{z}'^* + \underline{z}^*\underline{z}'^* + a \quad (a \in R)$$

$$\begin{aligned} \text{Exprimons : } \underline{z}\underline{z}'\underline{z}^{**} &= \underline{z}\underline{z}'(\underline{z}^* + \underline{z}'^* + \underline{z}^*\underline{z}'^* + a) \\ &= \underline{z}\underline{z}'\underline{z}^* + \underline{z}\underline{z}'\underline{z}'^* + \underline{z}^*\underline{z}\underline{z}'\underline{z}'^* + a\underline{z}\underline{z}' \\ &= \underline{z}^* + \underline{z} + 1 + a\underline{z}\underline{z}' = \underline{Z} \end{aligned}$$

(sachant que  $\underline{z}\underline{z}^* = \underline{z}'\underline{z}'^* = 1$ ) d'où  $\underline{Z} = \underline{z}\underline{z}'\underline{z}^{**}$

$$|\underline{Z}| = |\underline{z}^{**}|$$

Calculons  $|\underline{Z}|$  et montrons que  $|\underline{Z}| = |\underline{z}^{**}|$

$$|\underline{Z}| = |\underline{z}^{**}\underline{z}\underline{z}'| = |\underline{z}||\underline{z}'||\underline{z}^{**}| = 1.1|\underline{z}^{**}| = |\underline{z}^{**}|$$

$$\text{et } |\underline{Z}| = |\underline{z}^{**}|$$

- Forme trigonométrique d'un nombre complexe

○ **Exercice 1 :**

○

Soient les nombres complexes :

$$\underline{z}_1 = -1 + j\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \underline{z}_2 = \sqrt{3}(1 + j\sqrt{3})$$

Mettre les complexes  $\underline{Z} = \underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2$  et  $\underline{Z}' = \underline{z}_1 / \underline{z}_2$  sous la forme trigonométrique.

○ **Solution 1 :**

○

Transformons les formes algébriques de  $\underline{z}_1$  et  $\underline{z}_2$  en formes trigonométriques :

Module de  $\underline{z}_1$  :  $|\underline{z}_1| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$  ; argument de  $\underline{z}_1$  :  $\arg(\underline{z}_1)$  est  $\theta_1$  tel que

$$\cos \theta_1 = \frac{-1}{2} ; \sin \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Soit } \theta_1 = \frac{2\pi}{3} \quad \text{et} \quad \underline{z}_1 = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

Module de  $\underline{z}_2$  :  $|\underline{z}_2| = \sqrt{3} \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$  ; argument de  $\underline{z}_2$  :  $\arg(\underline{z}_2)$  est  $\theta_2$  tel que

$$\cos \theta_2 = \frac{1}{2} ; \sin \theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Soit } \theta_2 = \frac{\pi}{3} \quad \text{et} \quad \underline{z}_2 = 2\sqrt{3} \left( \cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

**Cas de la multiplication :**  $\underline{Z} = \underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2$

Module :  $|\underline{Z}| = |\underline{z}_1| \cdot |\underline{z}_2| = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$  ;

Argument :  $\arg(\underline{Z}) = \arg(\underline{z}_1) + \arg(\underline{z}_2) = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$

d'où la forme trigonométrique de  $\underline{Z}$  :  $\underline{Z} = 4\sqrt{3}(\cos \pi + j \sin \pi)$

La forme algébrique sera :  $\underline{Z} : -4\sqrt{3}$

**Cas de la division :**  $\underline{Z}' = \frac{z_1}{z_2}$

Module :  $|\underline{Z}'| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Argument :  $\arg(\underline{Z}') = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \pi/3$

d'où la forme trigonométrique de  $\underline{Z}' : \underline{Z}' = \frac{\sqrt{3}}{3} (\cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3})$

La forme algébrique sera :  $\underline{Z}' = \frac{\sqrt{3}}{6} + j \frac{1}{2}$

○ **Exercice 2 :**

Soient les deux nombres complexes:

$$\underline{z}_1 = 1 + jtg \frac{5\pi}{8} \quad \text{et} \quad \underline{z}_2 = 1 - jtg \frac{5\pi}{8}$$

Déterminer le module et l'argument de  $\underline{Z} = \frac{z_1}{z_2}$

○ **Solution 2 :**

○

Calcul du module de  $\underline{z}_1$  :  $|\underline{z}_1| = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \frac{5\pi}{8}}} = \frac{1}{|\cos \frac{5\pi}{8}|} = -\frac{1}{\cos \frac{5\pi}{8}}$

$\cos \frac{5\pi}{8} < 0$  car  $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{8} < \pi$

$|\underline{z}_1| = |\underline{z}_2|$  car  $\underline{z}_1$  et  $\underline{z}_2$  sont conjugués d'où  $|\underline{Z}| = \frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|} = 1$

Calcul de l'argument de  $\underline{z}_1$  :

$$\underline{z}_1 = 1 + jtg \frac{5\pi}{8} = -\frac{1}{\cos \frac{5\pi}{8}} \left( -\cos \frac{5\pi}{8} - j \sin \frac{5\pi}{8} \right) = \frac{-1}{\cos \frac{5\pi}{8}} \left( +\cos \frac{13\pi}{8} + j \sin \frac{13\pi}{8} \right)$$

d'où  $\arg(z_1) = \frac{13\pi}{8} \quad [2\pi]$

$\arg(z_1) = -\arg(\underline{z}_2)$  car  $z_1$  et  $z_2$  sont conjugués

et

$\arg(\underline{Z}) = \arg(z_1) - \arg(\underline{z}_2) = 2 \arg(z_1) = \frac{13\pi}{4}$  ou  $\frac{5\pi}{4} \quad [2\pi]$

car :  $\frac{13\pi}{4} = \frac{8\pi+5\pi}{4} = 2\pi + \frac{5\pi}{4}$  ;  $\arg(\underline{Z}) = \frac{5\pi}{4} \quad [2\pi]$

○ **Exercice 3 :**

○

Déterminer le module et l'argument du nombre complexe :

$\underline{Z} = -\sin 2\theta + j2\cos^2 \theta$  ;  $0 \leq \theta \leq \pi$

Discussion en fonction du paramètre  $\theta$

○ **Solution 3 :**

Transformons l'expression de  $\underline{Z}$  pour obtenir une forme trigonométrique.

Application de la formule de duplication :  $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$

D'où :

$$\underline{Z} = -\sin 2\theta + j2\cos^2\theta = -2\sin\theta\cos\theta + j2\cos^2\theta = 2\cos\theta \left[ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

car :  $-\sin\theta = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$  et  $\cos\theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

Le facteur  $2\cos\theta$  représentera un module si  $\cos\theta$  est positif ou nul.

1er cas :  $\theta \in \left[\theta + \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \cos\theta \geq 0$  et  $|\underline{Z}| = 2\cos\theta$  et  $\arg(\underline{Z}) = \theta + \frac{\pi}{2} [2\pi]$

- Opérations sur les nombres complexes

o **Exercice 1 :**

On donne les deux nombres complexes :

$$\underline{z}_1 = -\sqrt{6} + j\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \underline{z}_2 = 2 \left[ \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right]$$

Exprimer sous forme algébrique :  $\underline{z}_2$  ;  $\underline{z}_1 + \underline{z}_2$  ;  $\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2$  ;  $\underline{z}_1^2$  ;  $\frac{1}{\underline{z}_1}$  ;  $\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}$

o **Solution 1 :**

o

Transformons  $\underline{z}_2$  sous la forme algébrique :

$$\underline{z}_2 = \sqrt{3} - j$$

**Addition :**

$$\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (-\sqrt{6} + \sqrt{3}) + j(\sqrt{2} - 1)$$

**Multiplication :**

$$\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = 2\sqrt{2}(-1 + j\sqrt{3})$$

**Puissance :**

$$\underline{z}_1^2 = 4(1 - j\sqrt{3})$$

**Inversion :**

$$\frac{1}{\underline{z}_2} = \frac{\sqrt{3} + j}{4}$$

**Quotient :**

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = -\sqrt{2}$$

o **Exercice 2 :**

On donne les deux nombres complexes :

$$\underline{z}_1 = -\sqrt{6} + j\sqrt{2} \quad \text{et} \quad 2 \left[ \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right]$$

Exprimer sous forme trigonométrique :  $\underline{z}_1$

o **Solution 2 :**

Transformons  $\underline{z}_1$  sous la forme trigonométrique :

**Module de  $\underline{z}_1$  :**  $|\underline{z}_1| = \sqrt{(-\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$

**Argument de  $\underline{z}_1$  :**  $\arg \underline{z}_1 = \theta_1$

est tel que :

$$\left. \begin{array}{l} \cos\theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \rightarrow \theta_1 = \frac{5\pi}{6}$$

et

$$\underline{z}_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + j\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

### 5- Application à l'électricité des nombres complexes

En électricité, on peut caractériser le comportement d'un dipôle passif linéaire en régime sinusoïdal avec un nombre complexe que l'on appelle "impédance complexe".

Ainsi l'impédance complexe est :

Résistance :

$$Z_R = R \quad (R \text{ est la résistance en Ohms}).$$

Bobine :

$$Z_L = j\omega L \quad (L \text{ est inductance en Henry, et } \omega \text{ la pulsation du courant en rad/s}).$$

Condensateur :

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} \quad (C \text{ est la capacité en Farad et } \omega \text{ la pulsation en rad/s}).$$

## **Chapitre II**

### **Rappels sur les lois fondamentales de l'électricité**

## Chapitre II: Rappels sur les lois fondamentales de l'électricité [2-3-4-5]

### A. Régime continu

#### a- Courant électrique

On appelle courant électrique une circulation de charges électriques. Ces charges peuvent être :

- Des électrons
  - Dans un solide conducteur (cuivre, aluminium, etc).
  - Dans un liquide conducteur (mercure à la température de 20°C).
  - Dans le vide (tube électronique ou tube cathodique d'écran de télévision).
- Des trous (mais on se ramène à des électrons, voir cours d'électronique).
- Des ions dans une solution ( $2H^+ SO_4^{2-}$ ), par exemple dans l'électrolyte d'un accumulateur au plomb.

Cette liste n'est pas exhaustive.

On définit alors l'intensité d'un courant électrique par la loi suivante :

$$I = \frac{Q}{t} \quad (\text{II.1})$$

Ou :

$$i = \frac{dQ}{dt} \quad \text{avec } t \text{ en secondes, } Q \text{ en Coulomb (C) et } i \text{ en Ampères (A).}$$

L'intensité est le débit de charge électrique à travers la section d'un conducteur.

#### b- Effets du courant électrique

Le courant électrique a trois effets :

- Calorifique : (Effet Joule) utilisé pour la transformation de l'énergie électrique en chaleur. Il est voulu et bénéfique (radiateurs électriques) ou bien nuisible et combattu (pertes Joule dans les machines électriques).
- Magnétique : utilisé pour la transformation de l'énergie mécanique en énergie électrique et vice-versa.
- Chimique : utilisé pour le stockage ou la production d'énergie électrique continue (accumulateurs, piles).

#### c- Cause d'un courant électrique

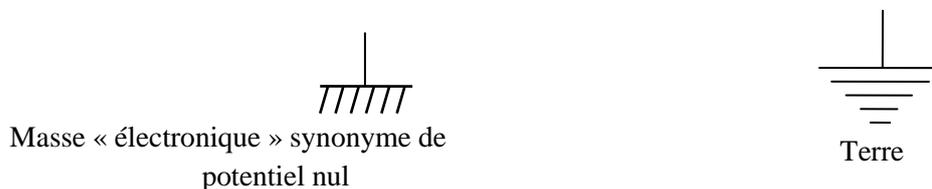
Le courant électrique circule entre deux points parce que les charges mobiles sont soumises à une différence de potentiel électrique (d.d.p. exprimée en Volts) entre ces deux points. Ce n'est pas la seule façon de créer un courant électrique, il existe des méthodes plus "exotiques" (voir exercice à la fin de ce chapitre). Néanmoins, dans toute la suite de ce cours, on ne s'intéresse qu'à des courants électriques créés par des d.d.p. soit continues (éventuellement variables mais toujours de même sens) ou alternatives (le sens de la d.d.p. change au cours du temps).

L'unité SI de différence de potentiel électrique (tension) est le Volt (V), tiré du nom du physicien italien Volta qui inventa la pile électrique en 1800. La d.d.p. se note souvent  $u$ ,  $e$  ou  $U$ ,  $E$  pour des grandeurs indépendantes du temps.

Il est important de comprendre que seul la d.d.p. est importante et qu'il n'y a pas de potentiel absolu pouvant servir de référence, comme pour les températures, par exemple, pour lesquelles il existe un zéro absolu. En électronique, on référence souvent les tensions par rapport à la masse (concrètement un châssis métallique s'il y en a un), masse à laquelle on attribue le potentiel 0 parce que c'est plus simple. On pourrait attribuer n'importe quelle valeur de potentiel à la masse. Le pôle – des générateurs de tension est très souvent considéré comme relié à la masse dans les schémas d'électronique ou d'électrotechnique.

En électrotechnique, les masses des récepteurs peuvent être reliées à la terre.

On utilise les symboles suivants :



*Figure II.1. Représentation des masses*

#### d- Polarité, sens du courant électrique

En électrotechnique "ordinaire", les charges mobiles sont les électrons des fils et câbles de cuivre ou d'aluminium. Des deux bornes d'un générateur, la borne qui présente un excès d'électrons est identifiée par un signe ( - ) par rapport à celle qui, comparativement, comportant un manque d'électrons est repérée par un signe ( + ). Ces deux bornes sont nommées respectivement borne négative et borne positive. Elles possèdent respectivement une polarité négative et une polarité positive.

Les premiers savants qui ont étudiés l'électricité ont imaginé que le courant électrique se déplaçait à l'extérieur du générateur de la borne + à la borne -. Malheureusement, ce sens conventionnel du courant, qui a été choisi arbitrairement, est l'inverse du sens de déplacement des électrons. Ces derniers se dirigent vers la borne positive du générateur lorsqu'ils se déplacent à l'extérieur du générateur.

Le sens conventionnel de circulation du courant, universellement adopté, considère le courant formé de charges positives et circulant de la borne + à la borne -.

#### - Énergie et puissance électrique

L'énergie mise en jeu par le déplacement d'une charge  $q$  se déplaçant sous la différence de potentiel ( $V_A - V_B$ ) est :  $w = q (V_A - V_B)$ . Pour une charge  $q$ , l'intensité du courant électrique du à son

déplacement est  $i = \frac{q}{t} \Rightarrow q = i \times t$

$$\text{Donc : } w = i \cdot t \cdot (V_A - V_B) = u \cdot i \cdot t \quad (\text{II.2})$$

en Joules (J), avec la d.d.p.  $u$  en Volts (V),  $i$  en A et  $t$  en s.

La puissance, quotient de l'énergie par le temps durant laquelle cette énergie est mise en jeux, est :

$$p = \frac{w}{t} = u \cdot i \quad (\text{II.3})$$

avec  $p$  en Watts (W).

Si on mesure la puissance dégagée sous forme de chaleur dans une résistance pour plusieurs intensités différentes, on peut alors tracer la courbe  $p = f(i)$  et on obtient une parabole d'équation  $p = R \cdot i^2$ .

On appelle  $R$  la résistance du conducteur, elle s'exprime en Ohm ( $\Omega$ )

La loi de Joule s'exprime par la formule :

$$p = r \cdot i^2 \quad \text{et} \quad w = r \cdot i^2 \cdot t \quad (\text{II.4})$$

A noter :

$$1 \text{ kWh} = 1000 \text{ W} \times 1\text{h} = 1000 \frac{\text{J}}{\text{s}} \times 3600 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

- Convention de signe

Par convention, si, lors du calcul d'une puissance dans un récepteur, on trouve un nombre positif, cela signifie que ce récepteur absorbe de la puissance et inversement.

Ainsi, le calcul de la puissance dissipée par effet Joule dans une résistance donnera un nombre positif, celui de la puissance délivrée à la résistance par le générateur qui l'alimente donnera un nombre négatif.

En règle générale, l'effet Joule est souvent nuisible, il diminue le rendement des machines électriques, en provoquant des échauffements, il accélère le vieillissement des matériaux. Enfin il peut conduire à des dommages irréparables, des incendies etc.

- Loi d'Ohm

On a :

$$p = r \cdot i^2 = u \cdot i$$

donc :

$$u = r i \quad (\text{II.5})$$

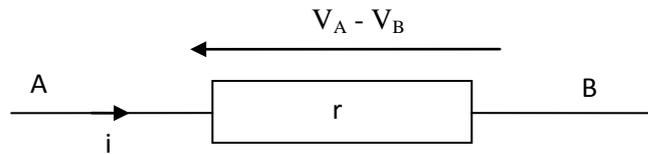
Le rapport entre la d.d.p. appliquée aux bornes d'un conducteur et le courant qui le parcourt est un nombre constant. Ce nombre caractérise une propriété du conducteur : sa résistance. La résistance d'un corps est l'opposition qu'il offre au passage du courant électrique. Elle se représente par le symbole  $r$  ou  $R$  si elle ne dépend pas du temps. L'unité SI de résistance est l'Ohm ( $\Omega$ ), tiré du nom du physicien allemand Georg Ohm.

- Conventions

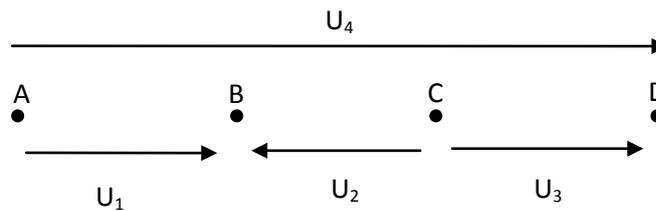
Le courant électrique circule du potentiel le plus élevé vers le potentiel le plus bas.

$$V_A > V_B$$

$$U = V_A - V_B = r i$$



- Addition de d.d.p. en série



$$U_4 = V_D - V_A = (V_D - V_C) + (V_C - V_B) + (V_B - V_A) = U_3 - U_2 + U_1$$

### 1- Dipôles électriques

#### a- Définition

On appelle dipôle électrique un dispositif électrique qui présente deux bornes A et B permettant de le relier à un circuit extérieur.

On distingue les dipôles générateurs qui fournissent de l'énergie au circuit extérieur et les dipôles récepteurs qui absorbent de l'énergie.

Certains dipôles ne peuvent être que récepteurs, c'est le cas d'une résistance ou d'une diode par exemple, d'autres peuvent être récepteur ou générateur suivant les cas. Ainsi, une inductance peut absorber de l'énergie électrique à un instant donné et la restituer à un instant ultérieur; une batterie peut alimenter un circuit et donc se comporter en générateur, mais aussi être rechargée et devenir récepteur. La figure suivante montre quelques exemples de dipôles courant.

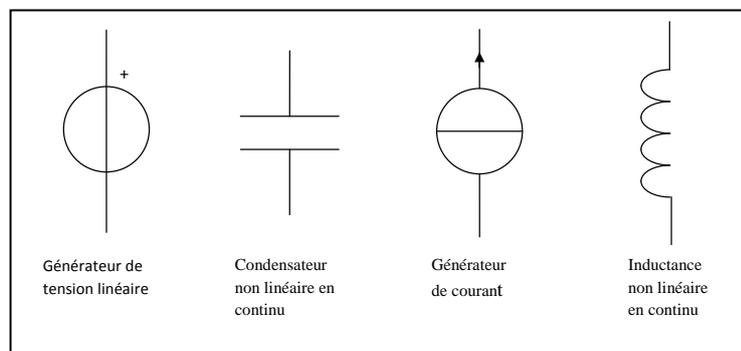


Figure II.2. Représentation des différents dipôles

### b- Caractéristiques électriques

C'est la relation entre la d.d.p.  $u$  (différence de potentiel) aux bornes du dipôle et le courant  $i$  qui traverse ce dernier. On peut s'intéresser à la courbe  $u = f(i)$  ou  $i = f^{-1}(u)$ .

Un dipôle dont la caractéristique électrique passe par l'origine est qualifié de passif. Il est parcouru par un courant nul lorsque la d.d.p. à ses bornes est nulle.

Les dipôles électriques linéaires possèdent des caractéristiques électriques linéaires formées de droites.

### c- Générateurs et récepteurs

Les générateurs (ou sources) sont des appareils qui fournissent de l'énergie électrique. Les récepteurs sont des appareils qui absorbent de l'énergie électrique.

Il existe des générateurs de tension et de courant, il existe des récepteurs de tension et de courant.

#### ➤ Générateur de tension

Pour les tensions continues, ce sont les batteries d'accumulateurs, les piles, les alimentations stabilisées ou régulées. En régime variable, ce sont les alternateurs, les sorties d'amplificateurs, d'oscillateurs, etc. Elles sont représentées par un schéma appelé générateur de Thévenin.

#### ➤ Générateur de tension idéal

C'est un générateur qui maintient une différence de potentiel fixe, constante entre ses bornes quel que soit le courant débité. On appelle cette d.d.p. la force électromotrice du générateur (f.é.m.) et on la note  $U$  ou  $E$  (en volts).

Symbole :

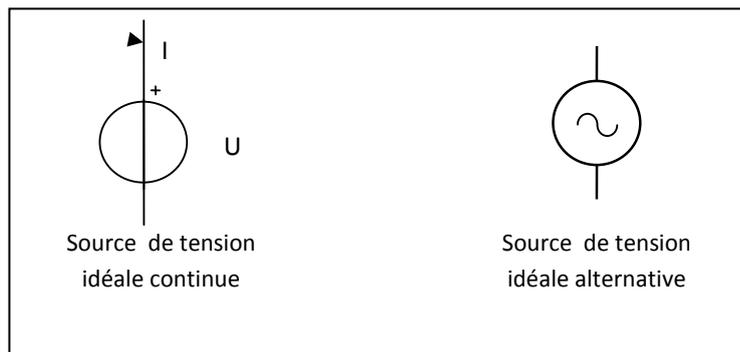


Figure II.3. Représentation des sources de tension

**Le courant sort par la borne + du générateur.** La puissance fournie par le générateur est

$$P_f = UI.$$

Il est important de noter que le courant sort par la borne +. Dans le cas de la source de tension alternative, la borne + change de place aux bornes du générateur, mais le courant sort par la borne + à chaque instant.

#### ➤ Caractéristique électrique d'un générateur de tension idéal

On appelle caractéristique électrique d'un dipôle la relation existant entre la d.d.p. aux bornes du

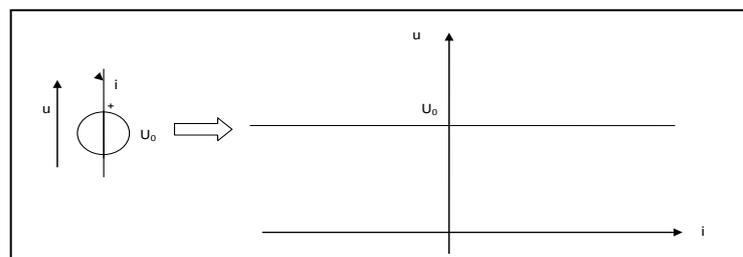


Figure II.4. Caractéristique électrique d'un dipôle idéal.

dipôle et le courant qui traverse le dipôle ( $u = f(i)$ ), ou bien la relation réciproque  $i = f(u)$ .  
 Pour un générateur idéal de tension, la caractéristique électrique est une droite horizontale.

➤ **Générateur de tension réel**

C'est l'association en série d'un générateur idéal de tension et d'une résistance (dite interne).

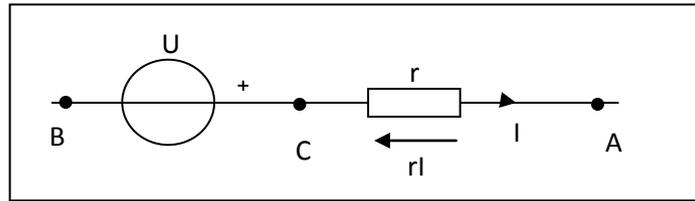


Figure II.5. Représentation d'un dipôle idéal.

Le point C n'est, bien sûr, pas disponible.

La d.d.p. aux bornes du générateur est :  $V_A - V_B = (V_A - V_C) + (V_C - V_B) = U - rI$ .

La puissance totale fournie par le générateur idéal est  $P_f = UI$

Les pertes par effet Joule dans la résistance interne sont  $P_J = rI^2$ .

La puissance utilisable dans le circuit extérieur est  $P_u = (V_A - V_B)I = (U - rI)I = UI - rI^2$ .

Le rendement du générateur est :  $\eta = \frac{P_u}{P_f} = \frac{(UI - rI^2)}{UI} = \frac{U - rI}{U} < 1$ .

➤ **Générateur de courant**

Ils sont appelés : générateurs de Norton. Ce sont les photodiodes, les photopiles, les inductances transformant l'énergie magnétique stockée en énergie électrocinétique durant un court intervalle de temps.

➤ **Générateur de courant idéal**

Un générateur de courant débite un courant  $I_0$  constant quel que soit la d.d.p. à ses bornes. Une analogie hydraulique intéressante consiste à le comparer à une pompe volumétrique.

Afin d'être insensible aux variations de d.d.p. à ses bornes, un générateur idéal de courant doit posséder une résistance interne infinie. La tension à ses bornes devant pouvoir varier instantanément, la capacité en parallèle avec lui doit être nulle également.

Symbole :

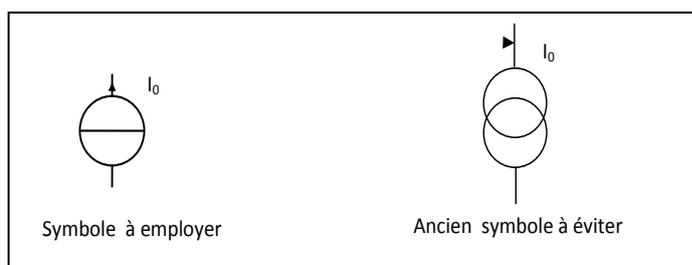
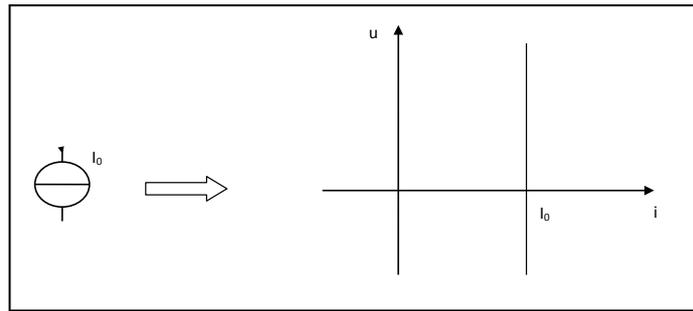


Figure II.6. Représentation d'un dipôle source de courant idéal.

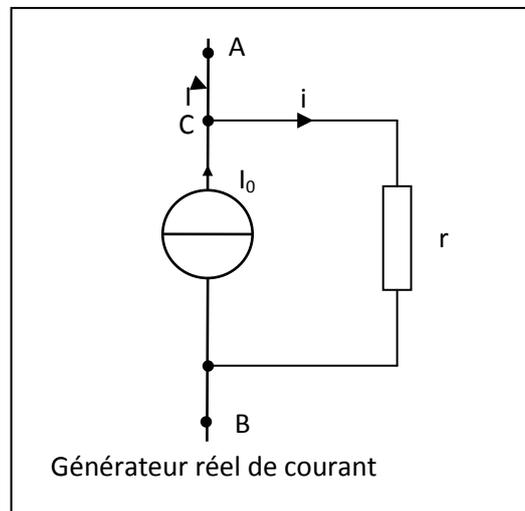
➤ **Caractéristique électrique d'un générateur idéal de courant**



**Figure II.7.** Caractéristique électrique d'un générateur idéal de courant.

➤ **Générateur réel de courant**

C'est l'association, en parallèle, d'un générateur idéal de courant et d'une résistance interne.



**Figure II.8.** Générateur de courant réel.

La d.d.p. aux bornes du générateur réel est  $V_A - V_B = ri$

La loi des nœuds appliquée en C donne :  $I_0 = I + i$

La puissance totale débitée par le générateur est  $P_f = (V_A - V_B)I_0$

Les pertes par effet Joule sont :  $P_J = ri^2$

La puissance fournie au circuit extérieur est  $P_u = (V_A - V_B)I = (V_A - V_B)(I_0 - i) = (V_A - V_B)I_0 - (V_A - V_B)i$

Soit  $P_u = P_f - (ri)i = P_f - P_J$

Le rendement du générateur est  $\eta = \frac{P_u}{P_f} = \frac{(V_A - V_B)I_0 - ri^2}{(V_A - V_B)I_0} = 1 - \frac{(V_A - V_B)i}{(V_A - V_B)I_0} = 1 - \frac{i}{I_0}$

### ➤ Règles d'association

Les générateurs de tension ou de courant ne peuvent pas être associés sans précaution. Il est évident que :

- Un générateur de tension idéal ne peut être court-circuité sinon on obtient un courant infini (impédance interne nulle).  $i = \frac{U_0}{r} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty$
- Un générateur idéal de courant ne peut voir la maille dans laquelle il est inséré ouverte, sinon la tension aux bornes de l'ouverture devient infinie en même temps que la résistance insérée dans le circuit (son ouverture).  $u = rI_0 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty$

### d-Equivalence entre générateur réel de tension et générateur réel de courant vu de l'extérieur

Soit un générateur réel de tension de paramètres  $E_0$  et  $r_0$ . Comment choisir les paramètres d'un générateur réel de courant,  $I_0$  et  $R_0$  afin que les deux générateurs présentent les mêmes propriétés électriques vu des bornes extérieures A et B ?

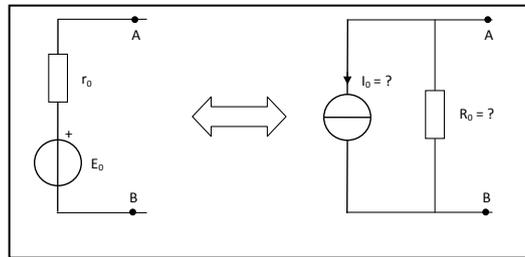


Figure II.9. Equivalence source de tension et de courant

### - Association de f.é.m. en série

Le générateur équivalent à  $n$  générateurs de tension réels en série possède une f.é.m. égale à la somme des f.é.m. des  $n$  générateurs idéaux et une résistance interne égale à la somme des  $n$  résistances internes.

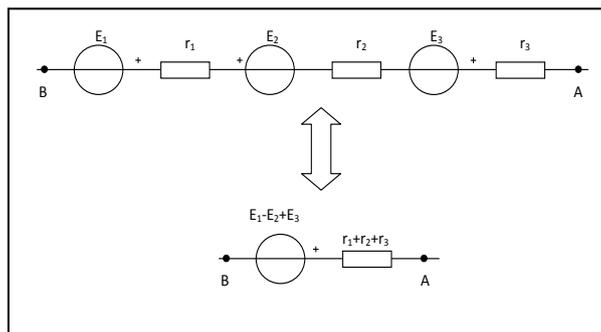


Figure II.10. Association de dipôle de f.e.m en série

Ainsi, le générateur équivalent au générateur entre les points A et B possède une f.é.m. égale à la somme des f.é.m. :  $E_{eq} = E_1 - E_2 + E_3$ , la résistance interne est la somme des résistances internes  $r_{eq} = r_1 + r_2 + r_3$ .

On appelle loi de Pouillet, la loi des mailles appliquées à un circuit fermé comportant en série des générateurs, des récepteurs et des résistances :

$$I = \frac{\sum f.e.m - \sum f.c.e.m}{\sum R} \tag{II.6}$$

- Association en parallèle de f.é.m.
- o Cas où les générateurs sont identiques

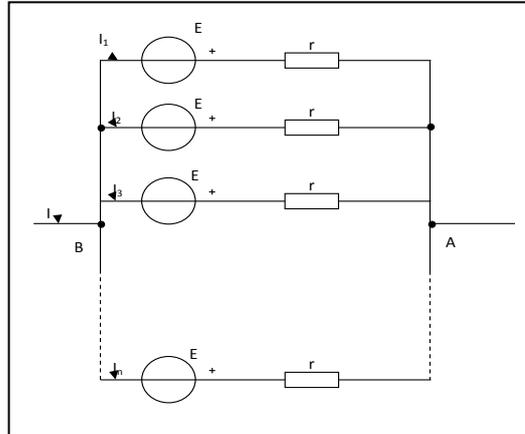


Figure II.11. Association de dipôle de f.e.m en parallèle

$$V_A - V_B = E - rI_1 = E - rI_2 = E - rI_3 = \dots = E - rI_n = E_{eq} - r_{eq}I \tag{II.7}$$

Comme les n branches sont identiques :  $I_1 = I_2 = \dots = I_n = \frac{I}{n}$

$$\text{Donc : } V_A - V_B = E - r \frac{I}{n} = E_{eq} - r_{eq}I \Rightarrow \begin{cases} E_{eq} = E \\ r_{eq} = \frac{r}{n} \end{cases}$$

- o Cas où les générateurs possèdent la même f.é.m. mais pas la même résistance interne

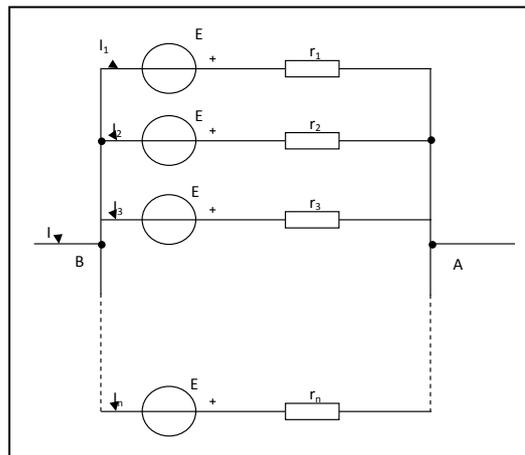


Figure II.11. Association de dipôle de f.e.m (Résistance différentes)

$$V_A - V_B = E - r_1I_1 = E - r_2I_2 = E - r_3I_3 = \dots = E - r_nI_n = E_{eq} - r_{eq}I$$

$$I_1 = \frac{E - (V_A - V_B)}{r_1}, I_2 = \frac{E - (V_A - V_B)}{r_2}, \dots, I_n = \frac{E - (V_A - V_B)}{r_n}$$

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = [E - (V_A - V_B)] \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n} \right) = \frac{E - (V_A - V_B)}{r_{eq}}$$

$$\frac{1}{r_{eq}} = \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n} \right) \text{ et } E_{eq} = E$$

- Cas où les générateurs sont différents

On remplace chaque générateur réel de tension par un générateur réel de courant équivalent :

On a placé le signe du générateur de tension  $E_3$  à l'inverse de celui des autres générateurs afin de bien faire comprendre que cela va donner un générateur de courant débitant une intensité dans le sens inverse de celles débitées par les autres générateurs de courant.

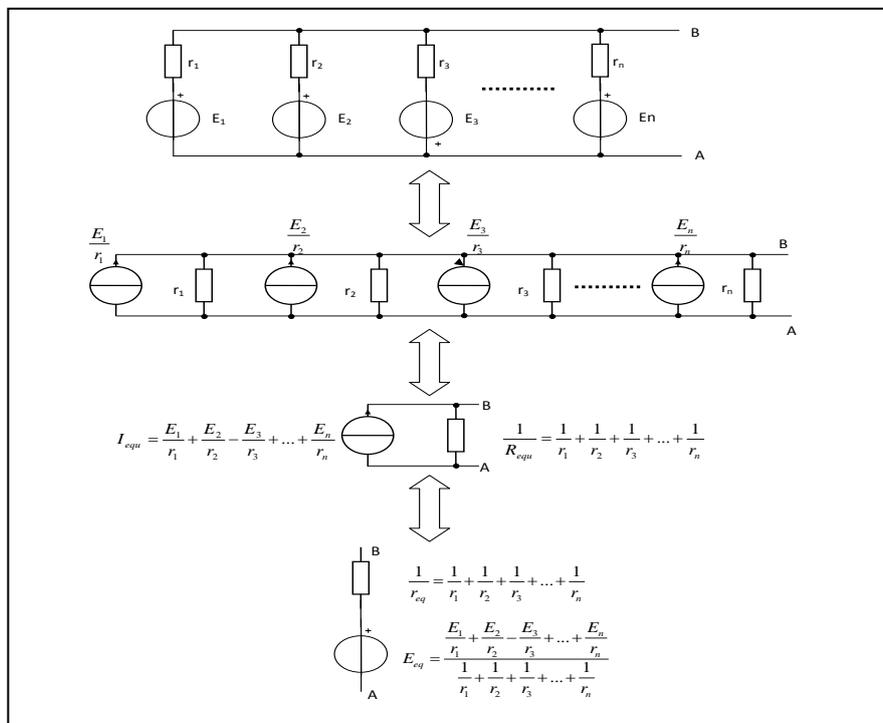


Figure II.12. Association de dipôle de f.e.m différentes.

La transformation que nous venons d'effectuer est connue sous le nom de **théorème de Millman**.

Ce théorème permet de calculer le potentiel inconnu sur la figure suivante, grâce à une formule assez simple.

On détermine le générateur de courant équivalent et on applique la loi d'Ohm :  $E = I_{eq} \cdot R_{eq}$  :

$$E = \frac{\frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2} - \frac{E_3}{r_3} + \frac{0}{r_4}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}}$$

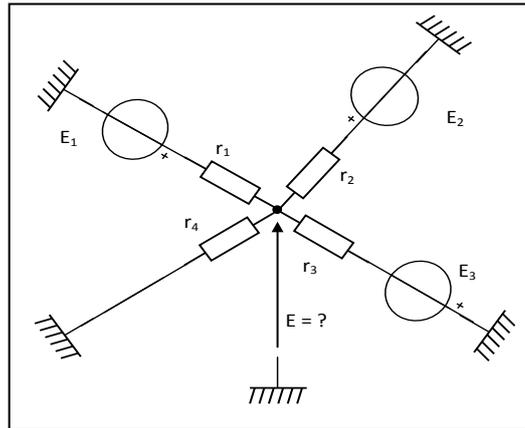


Figure II.14. Transformation Millman

Le terme  $\frac{0}{r_4}$  a été placé dans la formule afin de bien montrer que la branche 4, qui ne comporte pas de générateur de tension, donne un générateur de courant équivalent qui débite 0 ampère. Ne pas oublier de compter la résistance  $r_4$  au dénominateur pour le calcul de la résistance équivalente.

On a inversé le signe du générateur  $E_3$ , afin de bien montrer le signe à réserver au courant  $\frac{E_3}{r_3}$ .

- **Diviseur de tension**

Soit le montage suivant :

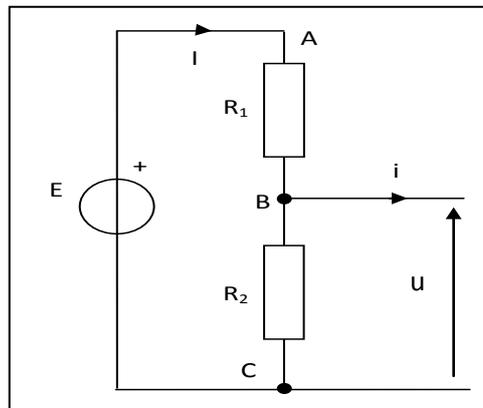


Figure II.15. Diviseur de tension

Si le réseau est à vide ( $i = 0$ ), alors :

$$V_A - V_C = E = (R_1 + R_2) I$$

et 
$$u = R_2 I = R_2 \frac{E}{R_1 + R_2} = V_B - V_C \Rightarrow u = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot E \tag{II.8}$$

- Cas du diviseur de tension chargé

Lorsqu'un récepteur est connecté au diviseur de tension, on ne peut plus négliger  $i$  absorbé par le récepteur.

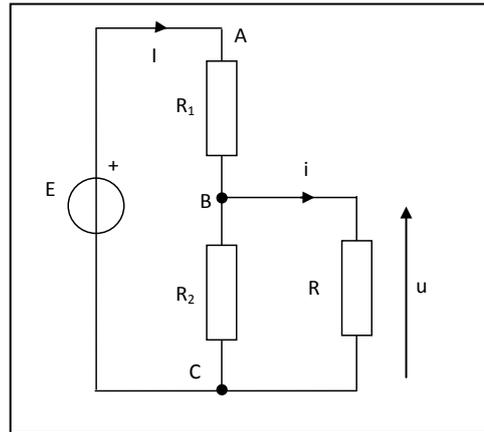


Figure II.16. Diviseur de tension chargé

On commence par calculer la résistance équivalente à  $R_2$  en parallèle avec  $R$ . La d.d.p. aux bornes et égale à cette résistance équivalente multipliée par le courant  $I$ , lui-même égale à la f.é.m.  $E$  divisée par la résistance totale ( $R$  plus la résistance équivalente à  $R_2$  en parallèle avec  $R$ ).

$$u = \left( \frac{RR_2}{R + R_2} \right) I = \left( \frac{RR_2}{R + R_2} \right) \cdot \frac{E}{R_1 + \left( \frac{RR_2}{R + R_2} \right)}$$

donc :

$$u = \frac{RR_2}{RR_1 + R_1R_2 + RR_2} \cdot E$$

- **Diviseur de courant**

soit le montage suivant :

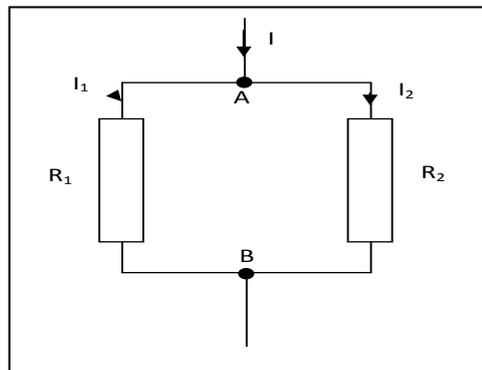


Figure II.17. Diviseur de courant

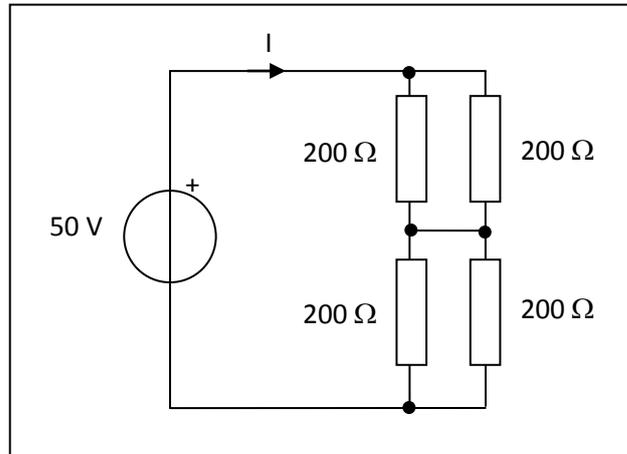
Il s'agit de calculer les courants  $I_1$  et  $I_2$  en fonction du courant  $I$  et des résistances  $R_1$  et  $R_2$ .

$$(V_A - V_B) = R_1 I_1 = R_2 I_2 = \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) I$$

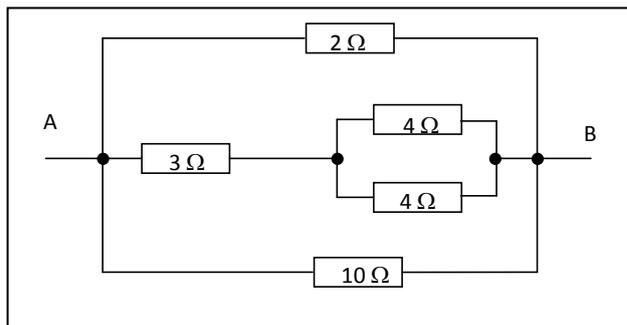
$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I \text{ et } I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I \tag{II.9}$$

2- Exercices avec solutions

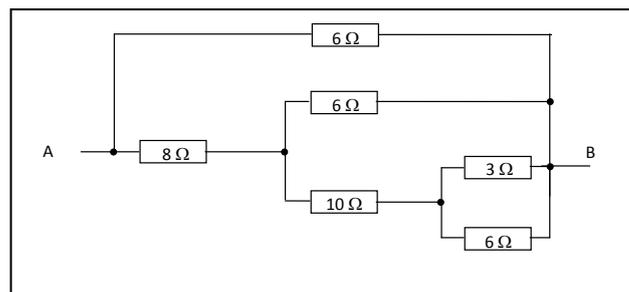
1. Déterminer I dans le schéma ci-dessous.



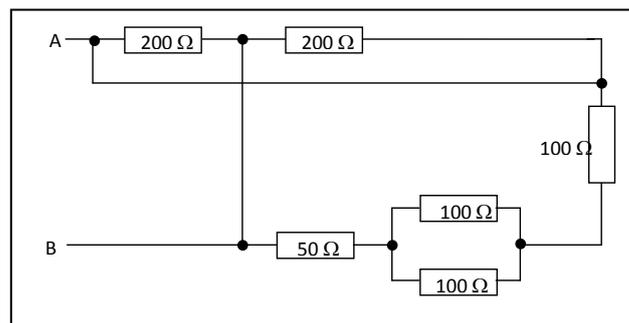
2. Déterminer la résistance équivalente entre A et B.



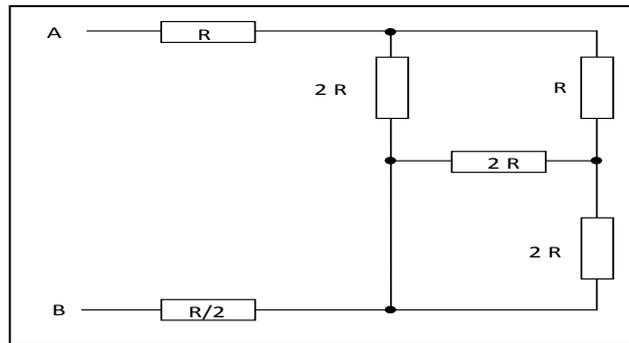
3. Déterminer la résistance équivalente entre A et B.



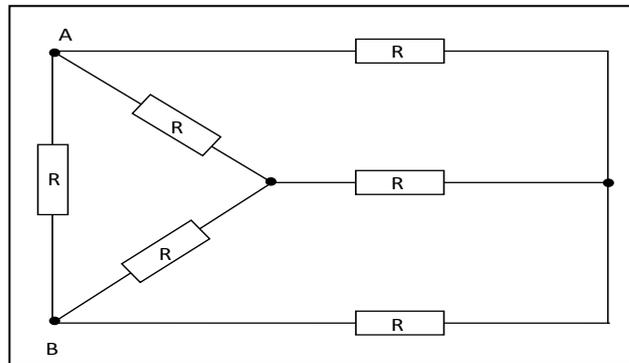
4. Déterminer la résistance équivalente entre A et B.



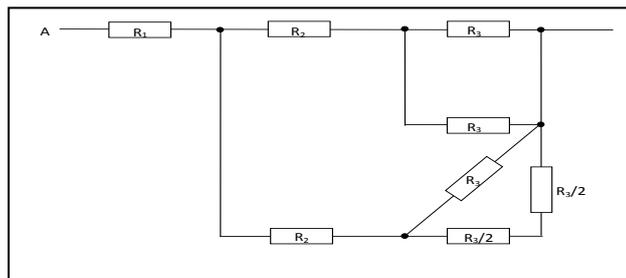
5. Déterminer la résistance équivalente entre A et B.



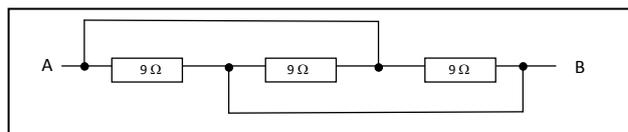
6. Déterminer la résistance équivalente entre A et B.



7. Déterminer la résistance équivalente entre A et B.

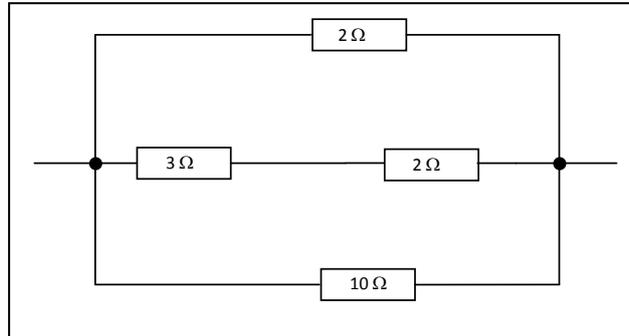


8. Déterminer la résistance équivalente entre A et B.



$$2. R_{eq} = \left(\frac{200}{2}\right) + \left(\frac{200}{2}\right) = 200 \Omega \Rightarrow I = \frac{50}{200} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ A}$$

3.



$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \Rightarrow R_{eq} = 1,25 \Omega$$

4.



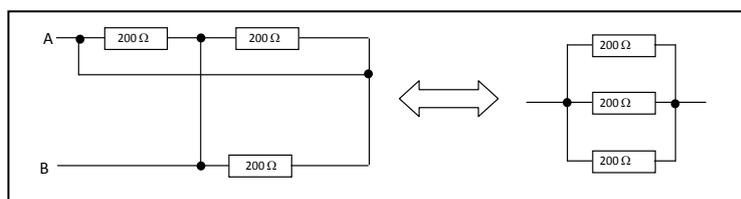
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \Rightarrow R_{eq1} = 1,25 \Omega$$

$$R_{eq2} = 1,25 + 2,4 + 4,4 = 8,05 \Omega$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{8,05} \Rightarrow R_{eq} = 3,084 \Omega$$

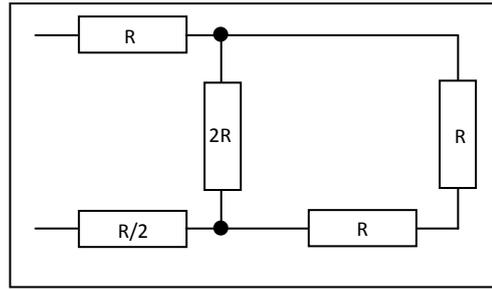
5. En regroupant deux résistances en parallèle, de proche en proche, on obtient :  $R_{eq} = 4 \Omega$ .

6.



$$R_{eq} = \frac{200}{3} \Omega$$

7. Un premier regroupement des deux résistances de valeur 2R placées en parallèle donne :



Puis :  $R_{eq} = R + R + \frac{R}{2} = \frac{5}{2} \cdot R$

8. On n'a pas intérêt à appliquer la transformation de Kenelly au triangle qui apparaît de prime abord. On peut appliquer Kenelly à un triangle formé de deux résistances horizontales et d'une résistance du triangle. On trouve :  $R_{eq} = R/2$

9. Là aussi, il n'est pas nécessaire d'appliquer Kenelly à ce qui ressemble à un triangle mais n'en n'est pas un ! On trouve :  $R_{eq} = R_1 + \frac{R_2}{2} + \frac{R_3}{4}$

10. Il faut réussir à voir que les trois résistances de  $9\Omega$  sont en parallèle, ainsi :  $R_{eq} = 3\Omega$

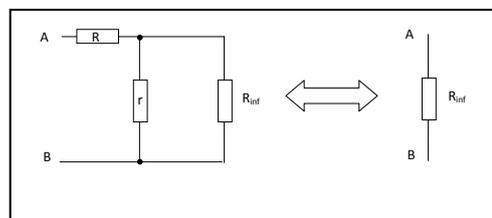
11.  $R_{eq} = \frac{3}{5} \cdot R$

12.  $R_{eq} = 3,95\Omega$

13.  $R_{eq} = 10,4\Omega$

14.  $R_{eq} = \frac{13}{12} R$

15. La méthode de résolution de ce problème peut être utilisée dans d'autres domaines de la physique (chaîne infinie de lentille par exemple). Appelons  $R_{inf}$  la résistance du réseau infini que nous cherchons. Celle-ci ne change pas lorsque l'on ajoute un nouvel élément R-r au début de la chaîne pour l'augmenter d'une unité.



Nous obtenons l'équation suivante :

$$R + \frac{rR_{inf}}{r + R_{inf}} = R_{inf} \Rightarrow R_{inf}^2 - R_{inf}R - rR = 0$$

$$\text{Soit : } R'_{\text{inf}} = \frac{R - \sqrt{R^2 + 4Rr}}{2} \text{ ou } R''_{\text{inf}} = \frac{R + \sqrt{R^2 + 4Rr}}{2}$$

La solution  $R'_{\text{inf}} = \frac{R - \sqrt{R^2 + 4Rr}}{2}$ , généralement négative, est à éliminer. Il n'y a en effet aucune

raison de trouver une résistance  $R < 0$ , cela n'aurait pas de signification.

Dans un réseau en échelle comme celui que l'on vient d'étudier, une façon de le terminer, après quelques sections, sans introduire aucune erreur dans son atténuation, consiste à insérer une résistance de la valeur déterminée ci-dessus au bout des sections R-r.

### 3- Condensateurs

Un condensateur est un dispositif qui accumule de l'énergie électrique dans un champ électrique (sous forme électrostatique). Il est formé de deux plaques conductrices appelées armatures séparées par un isolant (le diélectrique).



*Figure II.18. Présentation d'un condensateur*

#### a- Capacité d'un condensateur

Considérons un condensateur auquel on applique une d.d.p.  $V$  entre ses armatures. Les électrons vont circuler et s'accumuler sur l'une des armatures où une charge  $-Q$  apparaîtra tandis que sur l'autre armature une charge  $+Q$  s'accumulera.

La charge  $Q$  est proportionnelle à la d.d.p.  $V$ .  $q = C \cdot v$

On pose  $Q = C \cdot V$  ou pour des d.d.p. dépendantes du temps :  $q = C \cdot v$

$C$  s'appelle la capacité du condensateur, elle s'exprime en Farad (F) en l'honneur du physicien Faraday.  $Q$  ou  $q$  s'exprime en Coulomb et  $V$  ou  $v$  en volt.

Energie emmagasinée par un condensateur chargé

C'est l'énergie nécessaire pour charger le condensateur et que celui-ci restitue lorsqu'il se décharge. C'est une énergie électrostatique stockée dans le diélectrique du condensateur.

On a :  $W = \frac{1}{2} C \cdot V^2 = \frac{1}{2} Q \cdot V$   $W$  s'exprime en Joule,  $C$  en Farad et  $V$  en volt.

Démonstration :

Soit  $q$  la quantité d'électricité déjà emmagasinée à un instant donné, pendant la charge, et  $u$  la d.d.p. entre les armatures du condensateur à cet instant. On a :  $u = \frac{q}{C}$ .

Pendant un intervalle de temps très petit  $dt$ , à partir de cet instant, le condensateur reçoit la charge  $dq$ . Cette charge est prise à l'une des armatures pour être apportée sur l'autre armature et subit donc une variation de potentiel  $u$ . L'énergie qu'il faut lui fournir est :  $dW = u \cdot dq$ , comme  $u = \frac{q}{C}$ , il en résulte

$$dw = \frac{q}{C} dq.$$

L'énergie totale emmagasinée est la somme de tous les  $dw$  depuis le début de la charge jusqu'au moment où sa valeur est  $Q$  :

$$W = \sum dw \Rightarrow W = \frac{1}{C} \int_0^Q q \cdot dq = \frac{1}{C} \left( \frac{q^2}{2} \right)_0^Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2$$

En appelant  $V$  la d.d.p. finale régnant entre les deux armatures du condensateur.

### b- Condensateur plan

La capacité s'exprime par la formule :

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{e} \quad (\text{II.10})$$

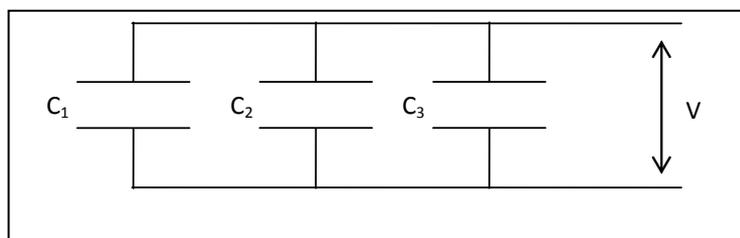
avec  $S$ , surface d'une armature en  $m^2$ ;  $e$ , épaisseur du diélectrique, en  $m$ ; et  $C$  en Farad.

$\epsilon_0$  est la permittivité du vide et  $\epsilon_r$  est la permittivité relative du diélectrique par rapport au vide.

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36 \cdot \pi \cdot 10^9} \text{ unité SI.}$$

### ➤ Association de condensateur

- En parallèle :



**Figure II.19.** Condensateurs en parallèle

On a :  $Q_1 = C_1 \cdot V$ ,  $Q_2 = C_2 \cdot V$ ,  $Q_3 = C_3 \cdot V$  sur chaque condensateur.

Le condensateur équivalent aura pour charge :

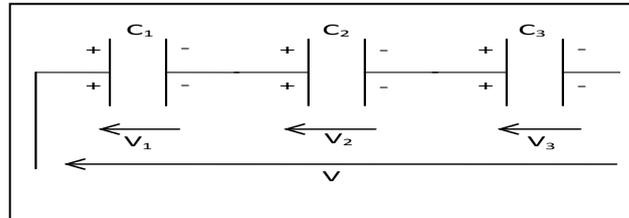
$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1 \cdot V + C_2 \cdot V + C_3 \cdot V = (C_1 + C_2 + C_3) \cdot V = C_{eq} \cdot V.$$

Et donc :  $C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$ .

Une démonstration par récurrence établirait :

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i$$

- 
- En série :



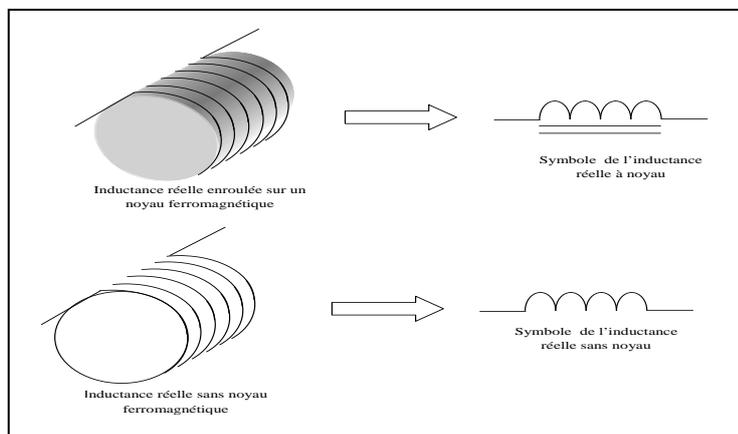
**Figure II.20.** Condensateurs en série

En série, la charge est commune, les d.d.p. s'additionnent :  $\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$

#### 4- Inductances

Une inductance est un composant qui accumule de l'énergie électrique dans un champ magnétique, ce faisant, elle s'oppose aux variations de l'intensité du courant électrique.

Une inductance est constituée par un conducteur électrique enroulé de manière à former un certain nombre de spires, celles-ci peuvent être enroulées sur un noyau de matériau ferromagnétique comme le montre la figure suivante :

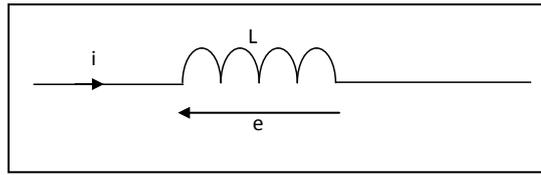


**Figure II.21.** Présentation d'une bobine

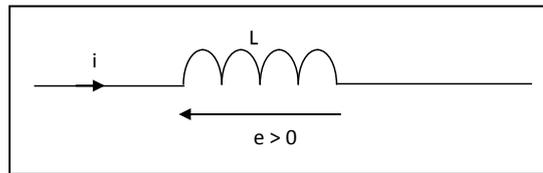
L'inductance s'exprime en Henry et se représente par la lettre L. Aux bornes d'une inductance traversée par un courant d'intensité variable en fonction du temps apparaît la f.é.m. :

$$e = L \cdot \frac{di}{dt} \quad (\text{II.11})$$

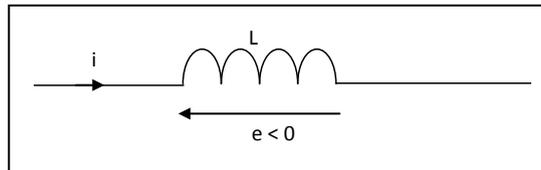
Convention de signe de  $e$  :



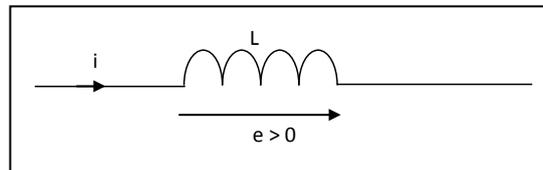
Si le courant croît,  $\frac{di}{dt} > 0$  et l'inductance est un récepteur siège d'une force contre électromotrice suivant le sens indiqué :



Si le courant décroît,  $\frac{di}{dt} < 0$  et  $e$  est une force électromotrice qui tend à empêcher la décroissance de l'intensité suivant le sens indiqué :



ou



### 5- Régime transitoire

#### 1- Charge et décharge d'un condensateur à tension constante

Charge d'un condensateur à tension constante

On connecte un condensateur non chargé à une source de tension  $V_0$  à travers une résistance  $R$ .

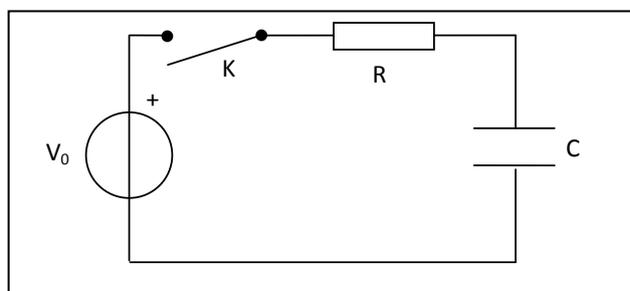


Figure II.21. Circuit de charge d'un condensateur

A l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur K. Le condensateur va se charger.

En fin de charge, chaque armature du condensateur porte la charge  $Q_f = C.V_0$ , en valeur absolue.

Soit un instant  $t$  entre le début et la fin de la charge, soit  $q$  la charge du condensateur à cet instant,  $v$  la d.d.p. à ses bornes et  $i$  le courant qui circule dans le circuit à cet instant.

$$\text{On a : } i = \frac{dq}{dt} \text{ et } V_0 = v + R.i. \text{ Or } v = \frac{q}{C}.$$

$$\text{Donc : } V_0 = \frac{q}{C} + R \cdot \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{V_0}{R}.$$

$$\text{D'où on peut tirer : } \frac{dq}{V_0 - \frac{q}{C}} = \frac{dt}{R} \text{ qui est une équation différentielle à variable séparées.}$$

2- Evolution de la charge  $q$  portée par une armature du condensateur

$$\text{Multiplions les deux membres par } -\frac{1}{C} : \frac{-\frac{1}{C}dq}{V_0 - \frac{q}{C}} = -\frac{dt}{CR}.$$

$$\text{Intégrons : } \ln\left(V_0 - \frac{q}{C}\right) = -\frac{t}{RC} + A, \text{ où } A \text{ est une constante d'intégration.}$$

Prenant l'exponentielle des deux membres, il vient :

$$V_0 - \frac{q}{C} = e^{-\frac{t}{RC} + A} = e^{-\frac{t}{RC}} \cdot e^A = B \cdot e^{-\frac{t}{RC}}, \text{ où } B \text{ est une constante à déterminer par les conditions initiales.}$$

Pour  $t = 0$ ,  $q = 0$  alors  $V_0 = B.e^0$  d'où :  $B = V_0$ .

$$\text{Donc } V_0 - \frac{q}{C} = V_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow \frac{q}{C} = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$\text{et donc : } q = C.V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Cette expression permet de calculer  $q$  en fonction du temps.

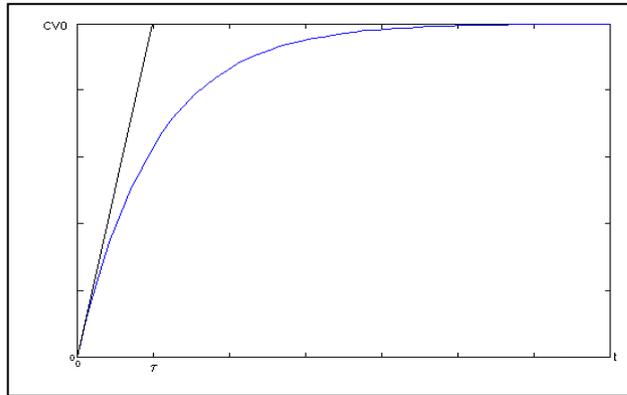
Evolution de la d.d.p.  $v$  aux bornes du condensateur :

Si l'on divise par  $C$  les deux membres de l'égalité précédente, il vient :

$$u = V_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (\text{II.12})$$

Cette égalité permet de calculer  $u$  en fonction du temps.

La charge  $q$ , comme la d.d.p.  $u$ , ont des évolutions exponentielles en fonction du temps comme le montre la figure suivante :



**Figure II.22.** Courbe de charge de condensateur

La constante de temps est  $\tau = RC$ . En particulier, la tangente à l'origine est une droite passant par le point  $t = \tau$  et  $q = CV_0$  ou  $u = V_0$ .

Pour  $t = 5 RC$ ,  $q = 0,9932 \times CV_0$ , ou  $u = 0,9932 \times V_0$ . On pourra considérer que la charge du condensateur est terminée, pratiquement, au bout de  $5\tau$ .

#### - Evolution du courant dans le circuit de charge

Juste après la fermeture de  $K$ ,  $C$  est l'équivalent d'un conducteur sans résistance, l'intensité est maximum, limitée seulement par  $R$ , et vaut  $i_{\max} = V_0/R$ . Au fur et à mesure que  $C$  se charge, une f.c.é.m., qui diminue l'intensité passant dans le circuit, apparaît à ses bornes.

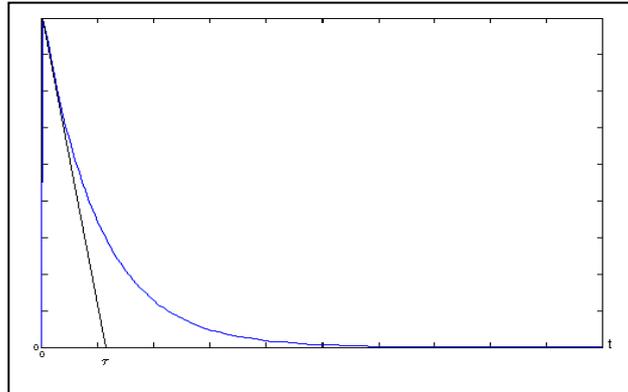
Lorsque le condensateur est complètement chargé, la d.d.p. à ses bornes est  $V_0$ , et le courant dans le circuit est nul.

L'équation de maille du circuit permet d'écrire :  $i = \frac{V_0 - u}{R}$ , en remplaçant  $u$  par son expression en fonction du temps que nous venons de déterminer :

$$i = \frac{V_0 - V_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)}{R}$$

$$i = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Cette expression permet de calculer  $i$  en fonction du temps. La figure suivante montre l'évolution de  $i$  en fonction de  $t$ .



**Figure II.22.** Courbe de décharge de condensateur

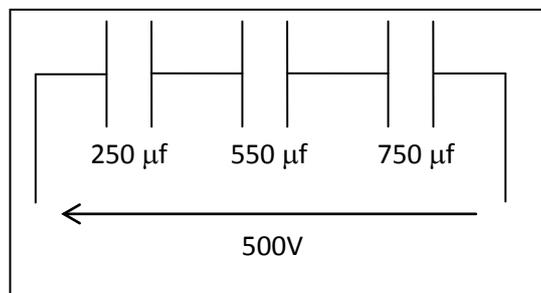
La tangente au point  $t = 0$ ,  $i_{\max} = V_0/R$  est une droite passant par  $t = \tau$  et  $i = 0$ .

Ici aussi,  $i$  pourra être considérée comme nulle, en fait  $(1 - 0.9932 = 0,0068) \times i_{\max}$ , au bout de  $5.RC$ .

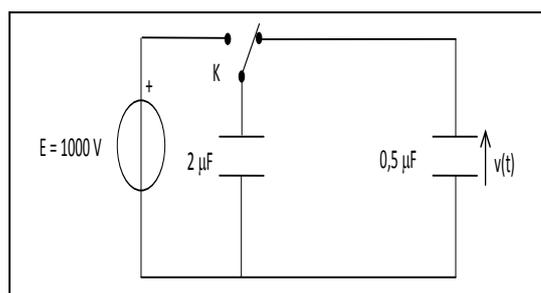
### 6- Exercices avec solutions

1. On charge un condensateur de  $400 \mu\text{F}$  sous  $500 \text{ V}$ . Calculer la charge  $Q$  prise par chacune des armatures et l'énergie emmagasinée par le condensateur.

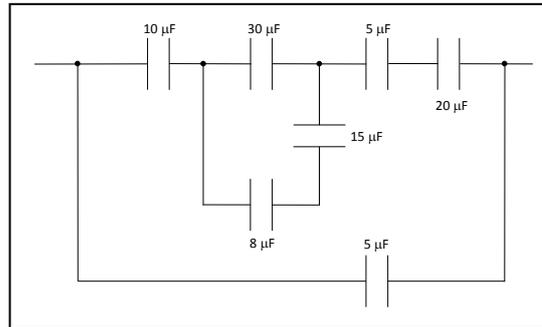
2. Calculer la capacité équivalente de l'ensemble de condensateurs du circuit suivant. Quelle est la charge prise par chaque condensateur ? Quelle est la d.d.p. aux bornes de chacun ?



3. On charge un condensateur de  $2 \mu\text{F}$  sous  $1000 \text{ V}$ . On l'associe en parallèle à un condensateur de  $0,5 \mu\text{F}$ , initialement déchargé, en basculant le commutateur  $K$ . Calculer la charge totale du système et la d.d.p. qui apparaît aux bornes des condensateurs. Calculer l'énergie emmagasinée par chaque condensateur et la perte d'énergie due au regroupement.



4. Calculer la capacité équivalente au groupement de condensateurs du circuit suivant :



- Solutions

1. La charge est égal à  $Q = C.V = 400 \cdot 10^{-6} \times 500 = 200 \text{ mC}$ .

L'énergie emmagasinée est  $W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV = 0,5 \times 200 \cdot 10^{-3} \times 500 = 50 \text{ J}$ .

2. Les trois condensateurs sont en série, on a donc :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} = \frac{1}{250 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{550 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{750 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow C_{eq} = 139,83 \mu F$$

Chaque condensateur acquiert la d.d.p. :  $V_i = \frac{C_{eq}}{C_i} V$ ,

$$\text{Soit : } V_1 = \frac{C_{eq}}{C_1} V = \frac{139,83 \cdot 10^{-6}}{250 \cdot 10^{-6}} \times 500 = 279,66 \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{C_{eq}}{C_2} V = \frac{139,83 \cdot 10^{-6}}{550 \cdot 10^{-6}} \times 500 = 127,12 \text{ V}$$

$$V_3 = \frac{C_{eq}}{C_3} V = \frac{139,83 \cdot 10^{-6}}{750 \cdot 10^{-6}} \times 500 = 93,22 \text{ V}$$

3. Le condensateur de  $2 \mu F$  que l'on charge sous  $1000 \text{ V}$  prend une charge de  $Q = CV = 2 \cdot 10^{-6} \times 1000 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ C}$ .

Cette charge se conserve lorsque l'on relie le condensateur de  $2 \mu F$  à celui de  $0,5 \mu F$ . Le condensateur équivalent à l'association en parallèle des deux condensateurs possède une capacité de  $2 + 0,5 = 2,5 \mu F$ . La d.d.p. qui régnera aux bornes de ce condensateur sera de

$$Q = C_{eq} V' \Rightarrow V' = \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{2,5 \cdot 10^{-6}} = 800 \text{ V}.$$

Avant que qu'on l'ait relié le condensateur de  $2 \mu\text{F}$  au condensateur de  $0,5 \mu\text{F}$ , l'énergie emmagasinée par le condensateur de  $2 \mu\text{F}$  est :  $W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \times 2 \cdot 10^{-6} \times 1000^2 = 1 \text{ J}$ .

L'énergie emmagasinée par le condensateur de  $2 \mu\text{F}$  après qu'on l'ait relié au condensateur de  $0,5 \mu\text{F}$  est :  $W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \times 2 \cdot 10^{-6} \times 800^2 = 640 \cdot 10^{-3} \text{ J}$ .

L'énergie emmagasinée par le condensateur de  $0,5 \mu\text{F}$  après qu'on l'ait relié au condensateur de  $2 \mu\text{F}$  est :  $W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \times 0,5 \cdot 10^{-6} \times 800^2 = 160 \cdot 10^{-3} \text{ J}$ .

La différence :  $1 - (640 \cdot 10^{-3} + 160 \cdot 10^{-3}) = 220 \cdot 10^{-3} \text{ J}$  s'est dissipée par effet Joule dans les fils du circuit et dans les armatures et un peu par rayonnement électromagnétique.

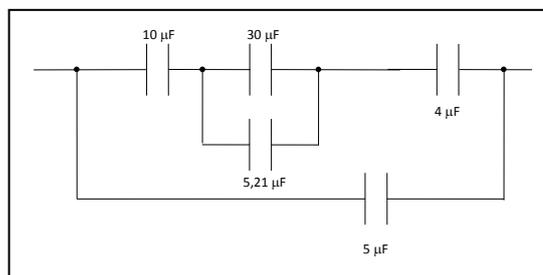
Pour bien voir ce qui se passe dans cet exercice, il est intéressant de considérer l'analogie suivante :

Le condensateur de  $2 \mu\text{F}$  peut être assimilé à un réservoir de gaz comprimé d'un volume  $2 \cdot V_0$  rempli de gaz sous la pression  $1000 \cdot P_0$ . La masse de gaz sous pression représente la charge électrique du condensateur de capacité  $2 \mu\text{F}$ . On relie ce réservoir à un autre réservoir, initialement vide, de volume  $0,5 \cdot V_0$  par un tuyau. On visualise bien qu'en l'absence de fuite, la masse de gaz (la charge) demeure inchangée. On "sent" également que le gaz ayant plus de volume à occuper, sa pression (la d.d.p. aux bornes des condensateurs) va diminuer et sera inférieure à  $1000 \cdot P_0$ .

4. On s'occupe d'abord de la branche du haut dans laquelle on remplace par un condensateur équivalent les condensateurs de  $5$  et  $20 \mu\text{F}$  en série sur la partie droite et les condensateurs de  $8$  et  $15 \mu\text{F}$  qui sont en parallèle à celui de  $30 \mu\text{F}$ . On obtient les condensateurs équivalents :

$$\frac{1}{C'_{eq}} = \frac{1}{8 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{15 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow C'_{eq} = 5,21 \mu\text{F} \quad \text{et} \quad \frac{1}{C''_{eq}} = \frac{1}{20 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{15 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow C''_{eq} = 4 \mu\text{F}$$

On obtient donc :



Ensuite on remplace les condensateurs de  $30$  et  $5,21 \mu\text{F}$  qui sont en parallèle par un condensateur équivalent de  $35,21 \mu\text{F}$ . Puis les 3 condensateurs en série de  $10$ ,  $35,21$  et  $4 \mu\text{F}$  par un condensateur de

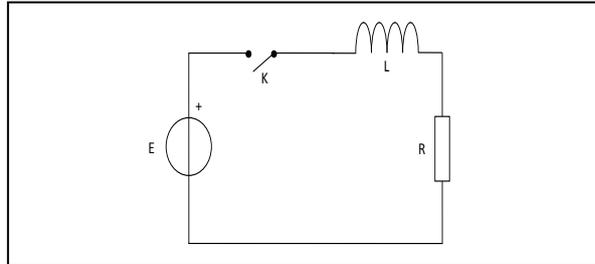
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{10 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{35,21 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{4 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow C_{eq} = 2,64 \mu\text{F}$$

Finalement, il ne reste plus qu'à remplacer les deux condensateurs en parallèle (2,64 et 5  $\mu\text{F}$ ) par un condensateur de capacité  $2,64 + 5 = 7,64 \mu\text{F}$ .

La capacité équivalente est donc de 7,64  $\mu\text{F}$ .

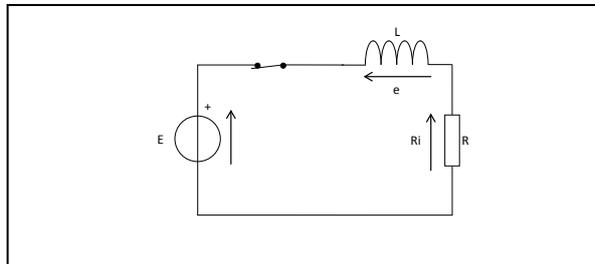
- Etablissement du courant dans une inductance : charge en énergie d'une inductance.

Considérons le schéma suivant :



A  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur K. L'intensité va croître de 0 à  $\frac{E}{R}$ . Pendant la croissance de  $i$ , une f.c.é.m.  $e$  apparaît aux bornes de l'inductance, elle s'oppose à l'établissement du courant  $i$ .

Les différentes d.d.p. apparaissent sur le schéma suivant :



L'équation de la maille donne :

$$Ri + L \frac{di}{dt} = E \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i = \frac{E}{L}$$

On reconnaît une équation différentielle du premier ordre. Nous avons résolu de telles équations dans le chapitre consacré aux condensateurs. La solution est :

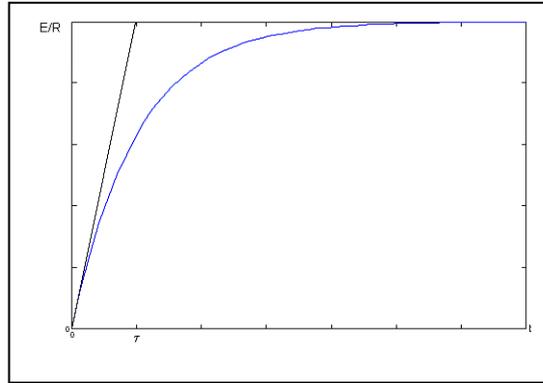
$$i = \frac{E}{R} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{L/R}} \right)$$

La durée d'établissement du courant électrique sera d'autant plus longue que la constante de temps

$\tau = \frac{L}{R}$  sera importante.

Comme on l'a vu dans le chapitre consacré aux condensateurs, on pourra considérer le courant comme ayant atteint sa valeur finale  $E/R$  au bout de  $5 \tau$  (à 1% près).

L'évolution de l'intensité en fonction du temps est exponentielle,



**Figure II.24.** Courbe de charge de bobine

Energie magnétique stockée dans l'inductance au cours de l'établissement du courant

Soit  $t$ , un instant pendant la charge, pendant un intervalle de temps très petit  $dt$ , à partir de cet instant,

l'inductance reçoit une énergie  $dW = e \cdot i \cdot dt = L \cdot \frac{di}{dt} \cdot i \cdot dt = L \cdot i \cdot di$

L'énergie totale emmagasinée est la somme de tous les  $dw$  depuis le début de la charge

où  $i = 0$  jusqu'au moment où sa valeur est  $I = E/R$  :

$$W = \sum dw \Rightarrow W = L \int_0^I i \cdot di = L \left( \frac{i^2}{2} \right)_0^I = \frac{1}{2} \cdot LI^2 = \frac{1}{2} L \left( \frac{E}{R} \right)^2$$

Ainsi, l'énergie électrocinétique convertie en énergie magnétique stockée dans l'espace dans et autour de l'inductance est :

$$W = \frac{1}{2} L \cdot I^2$$

#### ➤ Décharge d'une inductance

L'équation de maille donne :

$Ri + L \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow i = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{L/R}}$ , avec  $I_0$  valeur de l'intensité dans l'inductance juste avant le basculement du commutateur. Si le régime permanent (grandeurs constantes indépendantes du temps) était atteint, alors  $I_0 = E/R$ .

L'allure de la décroissance exponentielle de  $i$  est illustrée comme suit :

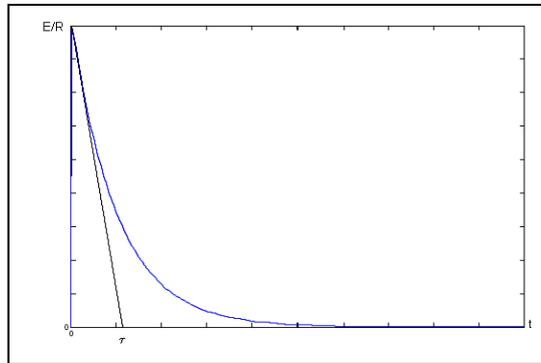


Figure II.25. Courbe de décharge de bobine

On considère que le courant  $i$  est nul au bout de  $5\tau = 5 \cdot \frac{L}{R}$  (en fait à 1% près).

L'inductance maintient le courant qui la traverse constant sur un intervalle de temps  $\ll \frac{L}{R}$ , elle est équivalente à un générateur de courant.

### 7- Association d'inductances

Lorsque qu'un circuit possède plusieurs inductances non couplées entre elles, il est possible de les associer à l'aide des règles suivantes :

#### - Inductances en série

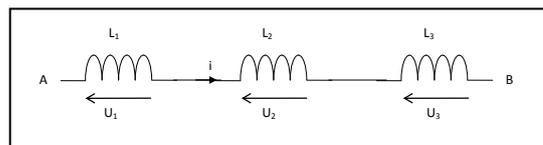


Figure II.26. Association de bobines en série

$$V_A - V_B = U_1 + U_2 + U_3 = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + L_3 \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2 + L_3) \cdot \frac{di}{dt}$$

$$V_A - V_B = (L_1 + L_2 + L_3) \cdot \frac{di}{dt} = L_{eq} \cdot \frac{di}{dt} \Rightarrow L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3$$

De façon générale, on démontre par récurrence que  $L_{eq} = \sum_{j=1}^n L_j$  pour des inductances en série.

### - Inductances en parallèle

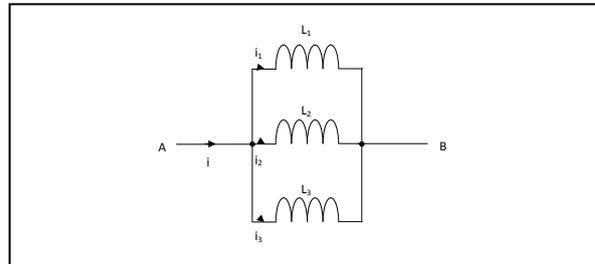


Figure II.27. Association de bobines en en parallèle

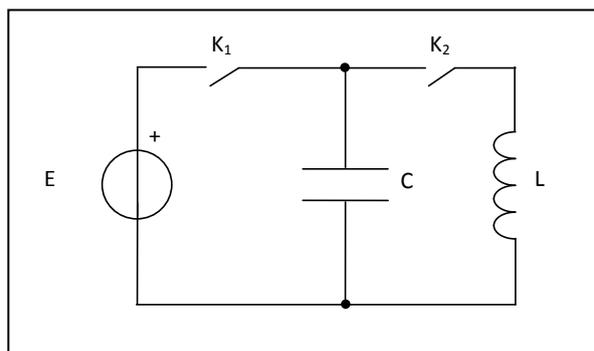
$$i = i_1 + i_2 + i_3 \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt} = \frac{V_A - V_B}{L_1} + \frac{V_A - V_B}{L_2} + \frac{V_A - V_B}{L_3}$$

$$V_A - V_B \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \right) = (V_A - V_B) \times \frac{1}{L_{eq}} \Rightarrow \frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}$$

On démontre par récurrence que  $\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{L_j}$

### - Circuit LC : oscillations de l'énergie

Soit le circuit suivant :



On ferme l'interrupteur  $K_1$ , le condensateur C se charge sous la d.d.p. E. On ouvre ensuite  $K_1$ . Puis on ferme  $K_2$ .

L'énergie électrostatique du condensateur va se transformer en énergie électrocinétique. Un courant va s'établir dans l'inductance qui transforme cette énergie électrocinétique en énergie magnétique. Lorsque le condensateur sera déchargé ( $v_C = 0$ ), son énergie électrostatique sera nulle et à cet instant, l'énergie magnétique de l'inductance sera maximale ainsi que le courant qui la traverse. Ce courant va charger le condensateur à l'inverse de sa polarité initiale. Lorsque l'énergie magnétique de la bobine sera épuisée, l'intensité dans le circuit sera nulle.

Mais, à cet instant, la d.d.p. aux bornes du condensateur sera maximum ainsi que l'énergie électrostatique qu'il renferme. L'énergie va aller et venir du condensateur à l'inductance et de l'inductance au condensateur.

Si la résistance du circuit est nulle, il y a conservation de l'énergie et l'amplitude maximum des oscillations de tension et d'intensité demeure constante dans le temps.

Calculons la période de ces oscillations :

L'énergie totale du système est constante et vaut :  $\frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C}$

Cette énergie ne dépendant pas du temps, on a :  $\frac{d\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C}\right)}{dt} = 0 \Rightarrow Li \cdot \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \cdot \frac{dq}{dt} = 0$

$$\text{Or : } i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

En remplaçant  $i$  et  $\frac{di}{dt}$  dans la dérivée de l'énergie totale par rapport au temps, il vient :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$$

La solution de cette équation différentielle du second ordre est :  $q = Q \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$\frac{dq}{dt} = -Q\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \text{ et } \frac{d^2q}{dt^2} = -Q\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

En remplaçant  $q$  et  $\frac{d^2q}{dt^2}$  par leur valeur en cos dans l'équation différentielle, il vient :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{LC}$$

1. Le condensateur porte une charge maximale, l'intensité dans le circuit est nulle.
2. Le condensateur se décharge et l'intensité augmente et circule dans le sens trigonométrique.
3. Le condensateur est complètement déchargé et l'intensité est maximale dans le sens trigonométrique.
4. Le condensateur se charge, mais sa polarité est l'opposé de celle de 1. et le courant diminue.
5. Le condensateur porte une charge maximale et une polarité opposée à celle de 1., le courant est nul.
6. Le condensateur se décharge et le courant augmente dans le sens des aiguilles d'une montre.

7. Le condensateur est complètement déchargé et le courant est maximum dans le sens des aiguilles d'une montre.

8. Le condensateur se charge et le courant diminue.

## B. Régime harmonique

### 1- Représentation des grandeurs sinusoïdales : représentation vectorielle et notation imaginaire

Considérons le courant sinusoïdal  $i = I_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0)$  avec  $\omega = 2\pi f$ ,  $\omega$  s'exprime en radians/seconde et  $f$  en Hertz. On appelle phase, la quantité  $\varphi = \omega t + \varphi_0$ ,  $\varphi_0$  est le déphasage initial (pour  $t = 0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ ). Une phase initiale négative déplace la courbe vers les temps positifs. Sur la figure suivante, le  $\sin(t - 30^\circ)$  est déplacé vers la droite.

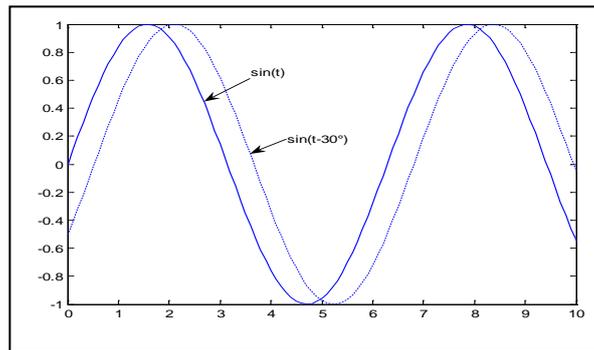


Figure II.28. Représentation du décalage de la courbe de  $30^\circ$

Une phase initiale positive déplace la courbe vers les temps négatifs. Sur la figure,  $\sin(t + 30^\circ)$  est déplacé vers la gauche.

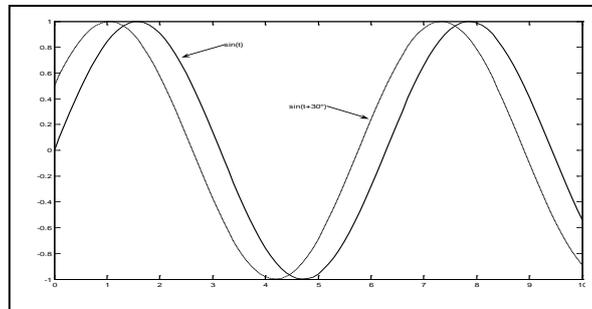


Figure II.29. Représentation du décalage de la courbe de  $-30^\circ$

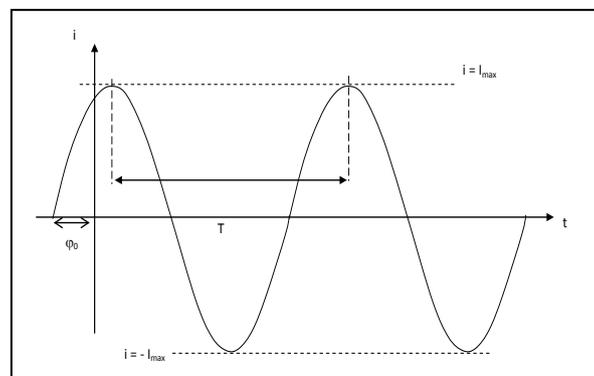


Figure II.30. Représentation du courant

$$i = I_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0) \tag{II.13}$$

Considérons alors le cercle trigonométrique; l'intensité  $i$  peut être représentée par le mouvement de la projection du point  $M$  sur l'axe des ordonnées situé sur le cercle et décrivant un mouvement de rotation uniforme (à la vitesse angulaire  $\omega$ ).

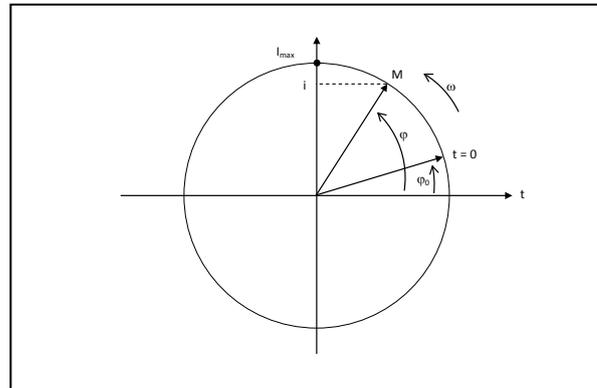


Figure II.31. Représentation du cercle trigonométrique

Ceci suggère de représenter la fonction intensité par un vecteur d'intensité constante égale à  $I_{\max}$ , supposé tourner à la vitesse de rotation  $\omega$ .

Un tel vecteur est appelé « vecteur de Fresnel »<sup>1</sup>.

Trois représentations d'une même réalité mathématique : une fonction sinus. Il est beaucoup plus simple d'additionner, de dériver, d'intégrer des vecteurs représentant des sinus que de réaliser les mêmes opérations sur les représentations temporelles.

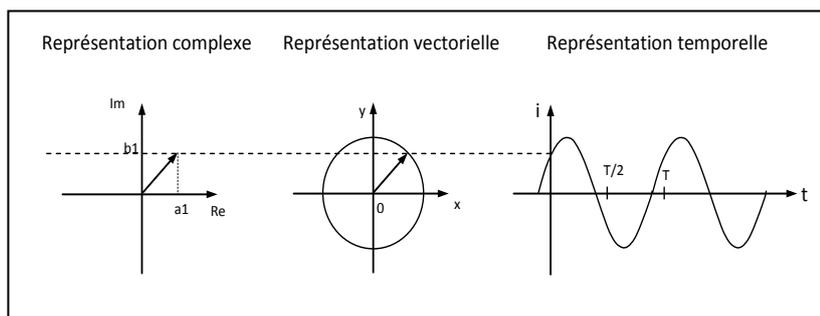


Figure II.32. Trois représentations

## 2- Valeur moyenne d'un signal périodique

### - Définition

Soit  $s(t)$  un signal périodique de période  $T$ . On note  $\langle s(t) \rangle$  sa valeur moyenne. Par définition :

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt \quad \forall t_0$$

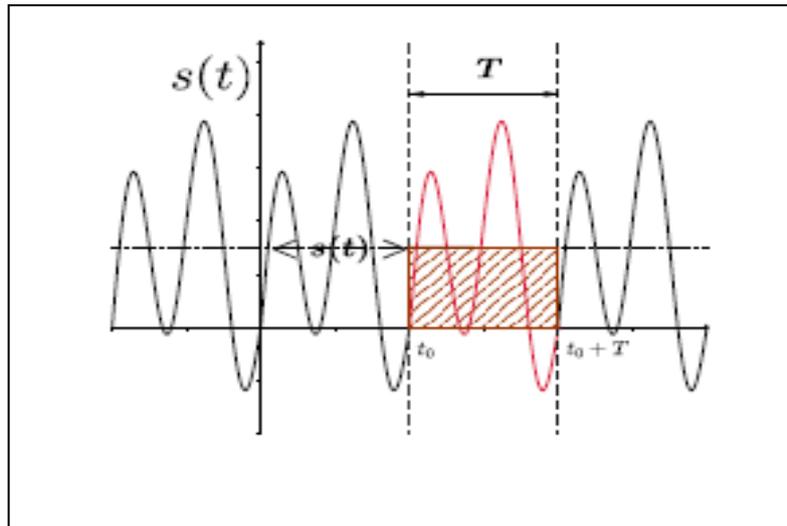


Figure II.33. Représentation de la valeur moyenne

L'intégration se fait sur un intervalle de temps égal à la période  $T$ , l'origine  $t_0$  pouvant être choisie arbitrairement. En général, on choisit la valeur de  $t_0$  qui permet les calculs les plus simples.

### 3- Valeur efficace d'un signal

#### - Définition

Les signaux sinusoïdaux ont une valeur moyenne nulle. Cependant ils peuvent transmettre de l'énergie.

En effet, l'énergie associée à un signal est en général proportionnelle au carré  $s^2(t)$  de celui-ci (par exemple, pour un signal sonore, l'énergie est proportionnelle au carré de la surpression).

On a donc intérêt à définir la moyenne quadratique du signal, i.e la valeur moyenne de  $s^2(t)$ .

Si  $s(t)$  est périodique de période  $T$  alors  $s^2(t)$  l'est aussi. La valeur quadratique moyenne du signal vaudra donc, d'après la définition précédente de la valeur moyenne :

$$\langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt \quad \forall t_0 \quad (\text{II.13})$$

$\langle s^2(t) \rangle$  a les mêmes dimensions que  $s(t)^2$  ( $\langle s^2(t) \rangle$  sera en  $\text{Pa}^2$  si  $s(t)$  est une pression mesurée en pascal).

On souhaite que la valeur efficace du signal soit de même dimension que celui-ci. Il suffit alors de prendre la racine carrée de la valeur quadratique moyenne. On définit ainsi la valeur efficace  $s_{\text{eff}}$  sur signal par :

$$s_{\text{eff}} \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt} \quad \forall t_0 \quad (\text{II.14})$$

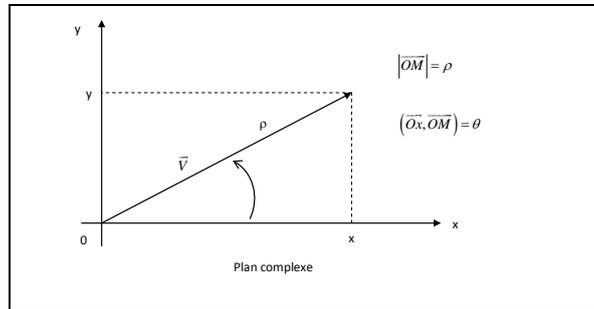
### 4- Représentation de Fresnel

#### - Notation imaginaire

On démontre mathématiquement que l'on peut associer un nombre complexe à un vecteur. L'intérêt de ce procédé est de faciliter grandement les calculs en remplaçant certaines opérations vectorielles par un simple calcul algébrique.

Nous utiliserons cette notation imaginaire chaque fois que nous aurons à calculer le produit, le quotient, la racine, la dérivée, l'intégrale, ... de fonctions sinusoïdales.

Dans le plan complexe, le vecteur  $\vec{V}$  peut être représenté par le point M d'affixe  $z$ .



**Figure II.34.** Représentation dans le plan complexe

Le vecteur  $\vec{V}$  peut être représenté par le nombre complexe  $z$ .

Ce dernier peut s'exprimer de deux manières :

- en coordonnées cartésiennes,  $z = x + jy$ , avec  $j^2 = -1$  ;
- en coordonnées polaires,  $z = \rho \cdot (\cos \theta + j \sin \theta) = \rho \cdot e^{j\theta}$ .

On a donc les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |\vec{V}| \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{array} \right.$$

$\rho$  est le module du vecteur  $\vec{V}$  et  $\theta$  est l'argument du nombre complexe.

## **Chapitre III : Circuits et puissances électriques**

## Chapitre 3 : Circuits et puissances électriques [3-5-6-7]

### A- Circuits monophasés et puissances électriques

#### 1- Loi d'Ohm en courant sinusoïdal, notion d'impédance

Les circuits classiques (circuits à constantes localisées) comportent trois sortes d'éléments :

- les résistances,
- les inductances,
- les condensateurs.

#### • Premier cas : débit d'une source de tension sinusoïdale sur une résistance pure

Soit le montage suivant :

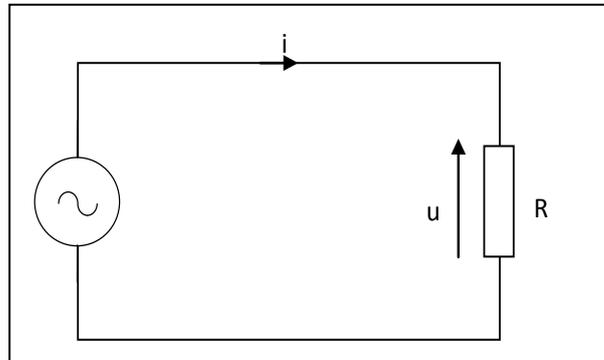


Figure III.1. Résistance reliée à une source de tension alternative

$$u = U_{\max} \sin(\omega t) \quad (\text{III.1})$$

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_{\max}}{R} \sin(\omega t) = I_{\max} \sin(\omega t) \quad \text{avec} \quad I_{\max} = \frac{U_{\max}}{R}$$

On voit que :

- Tension et intensité sont en phase ;

$$U_{\max} = R \cdot I_{\max} \quad \text{d'où} \quad I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{R}$$

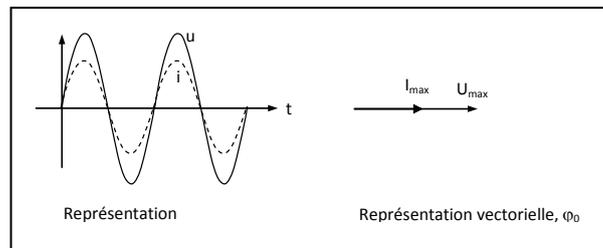
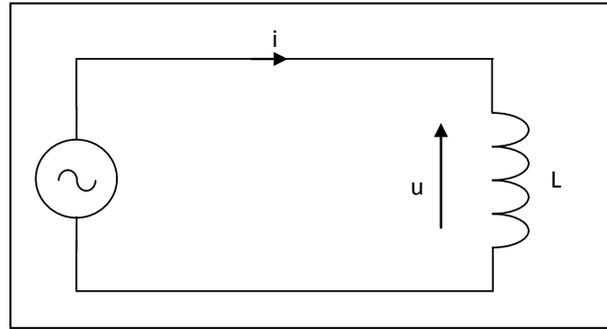


Figure III.2. Représentation de la tension et du courant

- **Deuxième cas : débit d'une source de tension sinusoïdale sur une inductance pure**

Soit le montage suivant :



*Figure III.3. Représentation d'une bobine reliée à une source de tension alternative*

$$u = U_{\max} \sin(\omega t)$$

La force électromotrice induite dans l'inductance est :  $e = -L \frac{di}{dt}$  (III.2)

Si la résistance du circuit est nulle, la loi d'Ohm relative aux valeurs instantanées s'écrit :

$$u + e = 0 \Rightarrow U_{\max} \sin(\omega t) - L \frac{di}{dt} = 0$$

$$\text{Soit : } di = \frac{U_{\max}}{L} \sin(\omega t) \cdot dt$$

$$\text{En intégrant, il vient : } i = -\frac{U_{\max}}{L\omega} \cos(\omega t) + cte$$

$$\text{Soit : } i = \frac{U_{\max}}{L\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + cte$$

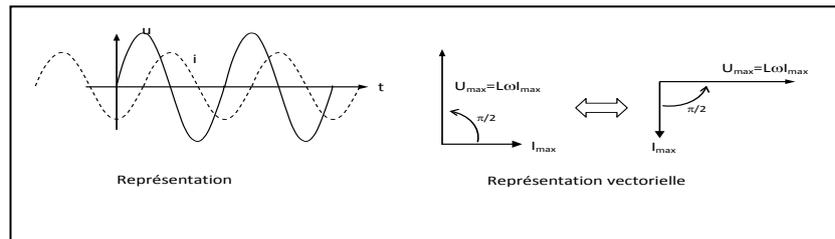
Si l'on suppose le régime permanent établi, la constante d'intégration peut être négligée (la valeur moyenne de  $i$  étant nulle), donc :

$$i = \frac{U_{\max}}{L\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_{\max} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

On constate que le courant est déphasé de  $\frac{\pi}{2}$  (déphasage retard) par rapport à la tension d'alimentation.

$$\text{On a : } I_{\max} = \frac{U_{\max}}{L\omega}, \text{ soit : } U_{eff} = L\omega \cdot I_{eff} \quad (\text{III.3})$$

$L\omega$  est homogène à une résistance, c'est la **réactance** du circuit.



**Figure III.4.** Représentation vectorielle

**Troisième cas :** débit d'une source de tension sinusoïdale sur un condensateur pur

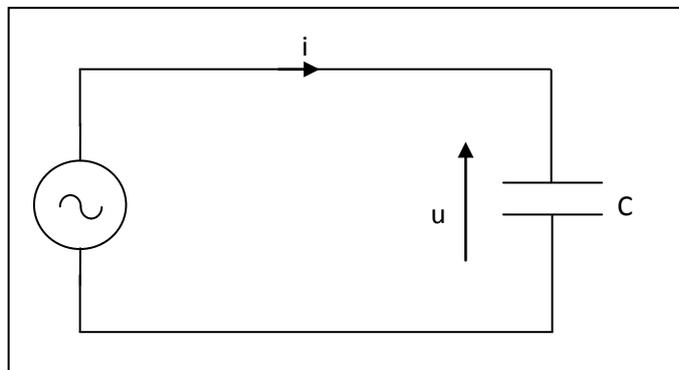
Le condensateur  $C$  se charge et se décharge au cours d'un cycle puis l'opération se répète au cours du cycle suivant.

Si  $q$  est la charge instantanée du condensateur, on a :

$$q = C \cdot u = C \cdot U_{\max} \sin(\omega t) \quad (\text{III.4})$$

On en déduit la valeur de l'intensité  $i = \frac{dq}{dt}$

$$i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du}{dt} = C \cdot \omega \cdot U_{\max} \cos(\omega t) = C \cdot \omega \cdot U_{\max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_{\max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$



**Figure II.5.** Représentation d'un condensateur relié à une source de tension alternative

On constate expérimentalement que le courant  $i$  est sinusoïdal. Tout se passe, en définitive, comme si le condensateur était traversé par le courant alternatif.

En fait, il n'en est rien : l'apparition des charges sur les armatures du condensateur est due au phénomène d'influence et il n'y a pas circulation des charges à l'intérieur du condensateur.

L'intensité maximale est proportionnelle à la tension maximale appliquée :

$$I_{\max} = C \cdot \omega \cdot U_{\max} \quad (\text{III.5})$$

On en déduit :  $I_{\text{eff}} = C \cdot \omega \cdot U_{\text{eff}}$

L'intensité est déphasée de  $\frac{\pi}{2}$  (en avance) sur la tension appliquée.

$\frac{1}{C\omega}$  est homogène à une résistance. Cette quantité est appelée la **capacitance**.

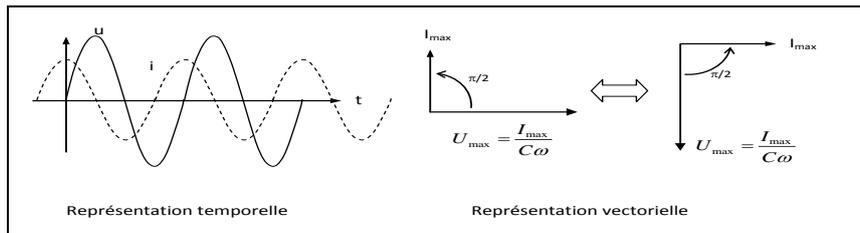


Figure III.6. Représentation vectorielle

• **Quatrième cas : débit d'une source de tension sinusoïdale sur un circuit RLC série**  
soit le montage suivant :

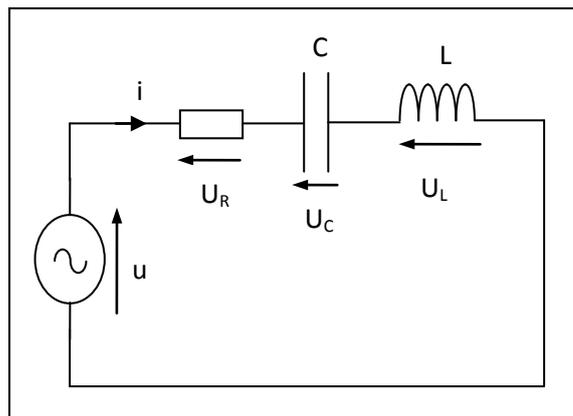


Figure III.7. Circuit R.L.C

$$u = U_{\max} \sin(\omega t)$$

$$\text{On a : } u = u_R + u_C + u_L \Rightarrow u = Ri + \frac{1}{C} \int i \cdot dt + L \frac{di}{dt}$$

$$\text{Soit encore : } L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{du}{dt} = U_{\max} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.

On sait que la solution de cette équation est égale à la solution générale de l'équation sans second membre, à laquelle on ajoute une solution particulière de l'équation complète.

- **Groupements d'impédances**

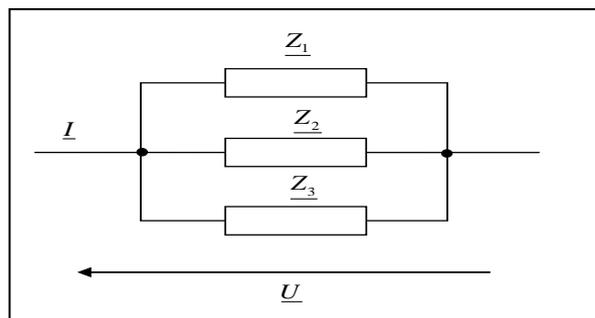
Il faut toujours prendre en compte les impédances complexes et ne jamais considérer les impédances comme égales à leurs modules.

Groupement d'impédances en série :

$$\text{On a alors } [z] = \sum [z_i] \quad (\text{III.6})$$

$$\text{Par contre : } Z \neq \sum Z_i$$

Groupement en parallèle :



*Figure III.8. Groupement d'impédance ne série*

$$\text{On a : } \underline{U} = \underline{U}_1 = \underline{U}_2 = \underline{U}_3$$

$$\text{La loi des nœuds donne : } \underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}$$

D'une manière générale, un raisonnement par récurrence permet d'établir que l'impédance équivalente complexe de n impédances complexes placées en parallèle est donnée par :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum_0^n \frac{1}{\underline{Z}_i}$$

$$\text{Ou, en posant : } \underline{Y}_i = \frac{1}{\underline{Z}_i} : \underline{Y}_{eq} = \sum_0^n \underline{Y}_i$$

## 2- Puissances électriques en régime sinusoïdales

### a- Puissance instantanée

L'énergie reçue par une portion de circuit (d'impédance  $Z$ ) pendant le temps  $dt$  est :

$$dw = u \cdot i \cdot dt \quad : \quad u \text{ et } i \text{ étant la tension et le courant instantané.}$$

La puissance instantanée est alors :  $p = \frac{dw}{dt} = u \cdot i$

- Puissance moyenne

La puissance moyenne, calculée sur une période, est donnée par :

$$P_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T p \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T u \cdot i \cdot dt$$

En régime permanent, on a : 
$$\begin{cases} u = U_{\max} \sin(\omega t) \\ i = I_{\max} \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$\text{d'où } P_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T U_{\max} \sin(\omega t) \cdot I_{\max} \sin(\omega t + \varphi) \cdot dt$$

Nous emploierons la formule :  $\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$  afin de transformer le produit de sinus. Il vient :

$$P_{moy} = \frac{U_{\max} \cdot I_{\max}}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega t + \varphi) \cdot dt = -\frac{U_{\max} \cdot I_{\max}}{2T} \int_0^T [\cos(2\omega t + \varphi) - \cos(-\varphi)] \cdot dt$$

$$\text{Or : } \cos(p) = \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) \cdot dt = \frac{1}{2\omega} [\sin(2\omega T + \varphi) - \sin(\varphi)] = 0$$

$$\text{Et } \cos(q) = \int_0^T -\cos(-\varphi) \cdot dt = -\int_0^T \cos(\varphi) \cdot dt = -\cos(\varphi) \int_0^T dt = -\cos(\varphi) \cdot T$$

Il vient donc :

$$P_{moy} = \frac{U_{\max} \cdot I_{\max} \cdot \cos(\varphi)}{2} = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi), \quad P_{moy} = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi) \quad (\text{III.7})$$

Le terme (facteur)  $\cos(\varphi)$  est appelé « facteur de puissance » de la portion de circuit considérée. Sa valeur ne dépend que des éléments du circuit et de la fréquence de la source.

### b- Puissance active et puissance réactive

Considérons le diagramme de Fresnel relatif à une portion de circuit d'impédance  $Z$  :

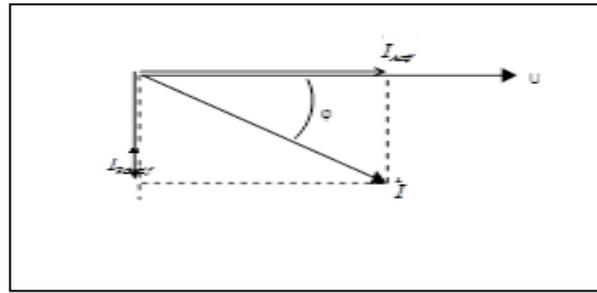


Figure III.9. Groupement d'impédance ne série

L'intensité totale  $\vec{I}$  traversant le circuit peut être décomposée en :  $\vec{I} = \vec{I}_{\text{actif}} + \vec{I}_{\text{réactif}}$

Le courant  $\vec{I}_{\text{actif}}$  est en phase avec la tension  $\vec{U}$ , il est appelé « courant actif » ou « courant watté ».

Le courant  $\vec{I}_{\text{réactif}}$  est déphasé de  $\frac{\pi}{2}$  par rapport à la tension  $\vec{U}$ , il est appelé « courant réactif » ou « courant déwatté ».

Par définition, la puissance active est la puissance dissipée dans les éléments récepteurs du circuit (résistance en particulier).

Par définition, la puissance réactive est la puissance échangée entre les éléments réactifs (inductances et capacités) du circuit considéré et le/les générateurs qui alimentent le circuit considéré.

La puissance instantanée est la somme des puissances active et réactive à un instant donné.

$$p = R \cdot I_{\text{max}}^2 \cdot \left( \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \right) + \frac{X \cdot I_{\text{max}}^2}{2} \cdot \sin(2\omega t)$$

Puissance active

Puissance réactive

En appelant  $P$  l'amplitude de la puissance active et  $Q$  l'amplitude de la puissance réactive, il vient :

$$p = P(1 - \cos(2\omega t)) + Q \sin(2\omega t)$$

On constate que la valeur moyenne  $P$  de la puissance active est égale à la puissance moyenne :

$$P_{\text{moy}} = P = \frac{R \cdot I_{\text{max}}^2}{2} = R \cdot I_{\text{eff}}^2 = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos \varphi \quad (\text{III.8})$$

Cette puissance s'exprime en watts (W). Elle est fournie par le courant actif  $\vec{I}_{\text{actif}}$  et

$$P = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$$

On constate également que la valeur moyenne de la puissance réactive est nulle. Son amplitude est donnée par :

$$Q = \frac{X \cdot I_{\max}^2}{2} = X \cdot I_{\text{eff}}^2 = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \sin \varphi$$

Cette amplitude s'exprime en « voltampères réactifs » (var, prend un s au pluriel, 1 var, 20 vars).

$$Q = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{Réactif}} \quad (\text{III.9})$$

### c- Puissance apparente

Par analogie avec le courant continu pour lequel le produit U.I représente la puissance, on appelle « puissance apparente » le produit :

$$S = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} = \frac{U_{\max} \cdot I_{\max}}{2} = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (\text{III.10})$$

La puissance apparente s'exprime en voltampère (V.A).

### d- Puissance complexe

Soit une impédance  $\underline{Z} = R + jX$  (X est la réactance de l'impédance, positive pour une inductance, négative pour une capacitance), aux bornes de laquelle on impose la tension  $\underline{V}$  et qui est traversée par un courant  $\underline{I}$  tel que :

$$\underline{V} = V e^{j\omega t} \text{ et } \underline{I} = I e^{j(\omega t + \varphi)} \Rightarrow \underline{I}^* = I e^{-j(\omega t + \varphi)}, \underline{I}^* \text{ est le conjugué de } \underline{I}.$$

On définit la puissance complexe par :  $\underline{S} = \underline{V} \cdot \underline{I}^* = P - jQ$

$$\underline{S} = \underline{V} \underline{I}^* = V e^{j\omega t} I e^{-j(\omega t + \varphi)} = V I e^{-j\varphi} = V I \cos \varphi - j V I \sin \varphi = P - jQ$$

On définit les puissances vues précédemment en fonction de la puissance complexe par les formules suivantes :

- Puissance active :  $P = V I \cos \varphi = R I^2 = \frac{V_R^2}{R} = \text{Re}(\underline{V} \underline{I}^*)$ , en Watt W,
- Puissance réactive :  $Q = V I \sin \varphi = X I^2 = \frac{V_X^2}{X} = \text{Im}(\underline{V} \underline{I}^*)$ , en var,
- Puissance apparente :  $S = V I = Z I^2 = V^2 / Z = \text{module}(\underline{V} \underline{I}^*)$ , en VA,
- Facteur de puissance :  $\cos \varphi = R / Z = P / S$

On a également les relations suivantes qui présentent un moindre degré d'utilité :

$$P = \frac{1}{2} (\underline{S} + \underline{S}^*) \quad (\text{III.11})$$

$$Q = \frac{1}{2j} (\underline{S} - \underline{S}^*)$$

**e- Exercices avec solutions**

Déterminons la puissance active, la puissance réactive et la puissance apparente dissipée dans un circuit d'impédance  $\underline{Z} = 3 + j4 \Omega$ , alimenté par une tension  $V = 100\angle 30^\circ \text{ V}$ .

Déterminons tout d'abord l'intensité qui circule dans le circuit :  $\underline{I} = \frac{V}{Z} = \frac{100\angle 30^\circ}{5\angle 53,1^\circ} = 20\angle -23,1^\circ \text{ A}$

Premier groupe de formules :

$$P = VI \cos \varphi = 100 \times 20 \times \cos(30 + 23,1) = 1200 \text{ W}$$

$$Q = VI \sin \varphi = 100 \times 20 \times \sin(30 + 23,1) = 1600 \text{ vars}$$

$$S = VI = 100 \times 20 = 2000 \text{ VA}$$

Deuxième groupe de formule :

$$P = RI^2 = 3 \times 20^2 = 1200 \text{ W}$$

$$Q = XI^2 = 4 \times 20^2 = 1600 \text{ vars}$$

$$S = ZI^2 = \sqrt{(3^2 + 4^2)} \times 20^2 = 2000 \text{ VA}$$

Troisième groupe de formule :

Attention : il faut prendre garde à considérer la d.d.p. aux bornes de la résistance ou de la réactance et non la tension totale aux bornes de l'impédance  $Z$ .

$$\text{Ici, } V_R = R \times I = 3 \times (20\angle -23,1^\circ) = 60\angle -23,1^\circ \text{ V}$$

$$V_X = (4\angle 90^\circ) \times (20\angle -23,1^\circ) = 80\angle 66,9^\circ \text{ V}$$

$$\text{D'où : } P = \frac{V_R^2}{R} = \frac{60^2}{3} = 1200 \text{ W}$$

$$Q = \frac{V_X^2}{X} = \frac{80^2}{4} = 1600 \text{ vars}$$

$$S = \frac{V^2}{Z} = \frac{100^2}{5} = 2000 \text{ VA}$$

Quatrième groupe de formules :

$$\underline{S} = \underline{V} \cdot \underline{I}^* = (100\angle 30^\circ) \times (20\angle 23,1^\circ) = 2000\angle 53,1^\circ = 1200 + j1600 \text{ VA}$$

S'où l'on tire  $P = 1200 \text{ W}$ ,  $Q = 1600 \text{ vars}$  et  $S = 2000 \text{ VA}$

Le facteur de puissance est  $\cos 53,1^\circ = 0,6$  inductif. Inductif car la puissance réactive  $Q$  que nous avons calculé est positive, c'est donc l'indication d'une consommation de puissance réactive par l'impédance et cela implique que cette impédance soit de nature inductive. Ou encore, en examinant l'impédance, l'argument positif implique que la d.d.p. aux bornes de l'impédance est déphasée en avance par rapport au courant qui la traverse ( $\underline{V} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$ ) ce qui implique également une impédance de nature inductive.

L'énergie électrique est essentiellement distribuée aux utilisateurs sous forme de courant alternatif par des réseaux en haute, moyenne et basse tension. L'énergie consommée est composée d'une partie "active", transformée en chaleur ou mouvement, et d'une partie "réactive" transformée par les actionneurs électriques pour créer leurs propres champs électromagnétiques.

L'utilisateur ne bénéficie que de l'apport énergétique de la partie "active" ; la partie "réactive" ne peut pas être éliminée, mais doit être compensée par des dispositifs appropriés. L'énergie totale soutirée au réseau de distribution sera ainsi globalement réduite. Les économies d'énergie réalisées se chiffrent par dizaines de pour cent de la consommation globale.

#### **f- L'énergie réactive : définitions et rappels essentiels**

##### **➤ Energies active, réactive, apparente**

Toute machine électrique utilisant le courant alternatif (moteur, transformateur) met en jeu deux formes d'énergie : l'énergie active et l'énergie réactive.

L'énergie active consommée (kWh) résulte de la puissance active  $P(\text{kW})$  des récepteurs. Elle se transforme intégralement en puissance mécanique (travail) et en chaleur (pertes).

L'énergie réactive consommée (kvarh) sert essentiellement à l'alimentation des circuits magnétiques des machines électriques. Elle correspond à la puissance réactive  $Q(\text{kvar})$  des récepteurs.

L'énergie apparente (kVAh) est la somme vectorielle des deux énergies précédentes. Elle correspond à la puissance apparente  $S(\text{kVA})$  des récepteurs, somme vectorielle de  $P(\text{kW})$  et  $Q(\text{kvar})$ .

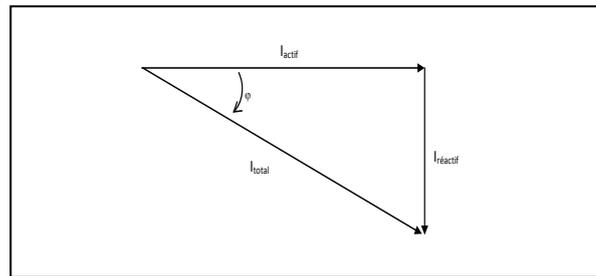
##### **➤ Composantes active et réactive du courant**

A chacune des énergies active et réactive, correspond un courant. Le courant actif ( $I_a$ ) est en phase avec la tension du réseau. Le courant réactif ( $I_r$ ) est déphasé de  $90^\circ$  par rapport au courant actif, soit en retard (récepteur inductif), soit en avance (récepteur capacitif).

Le courant apparent ( $I_t$ ) est le courant résultant qui parcourt la ligne depuis la source jusqu'au récepteur.

Si les courants sont parfaitement sinusoïdaux, on peut utiliser la représentation de Fresnel.

Ces courants se composent alors vectoriellement :



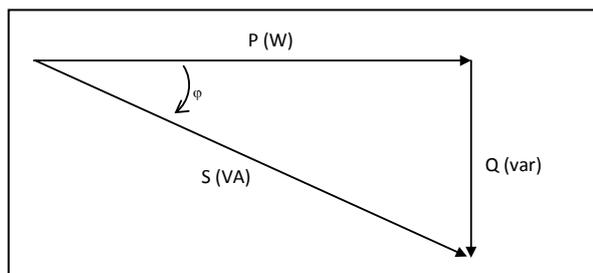
$$\begin{cases} I_{actif} = I_{total} \times \cos \varphi \\ I_{réactif} = I_{total} \times \sin \varphi \\ I_{total} = \sqrt{I_{actif}^2 + I_{réactif}^2} \end{cases}$$

➤ **Composantes active et réactive de la puissance : triangle des puissances**

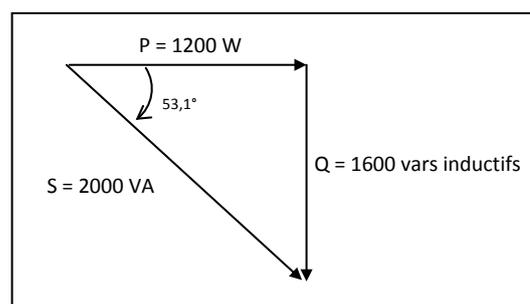
Le diagramme précédent établi pour les courants est aussi valable pour les puissances, en multipliant chacun des courants par la tension commune  $U$ .

On définit ainsi :

- la puissance apparente :  $S = UI$  (kVA),
- la puissance active :  $P = UI \cdot \cos \phi$  (kW),
- la puissance réactive :  $Q = UI \cdot \sin \phi$  (kVAR).



Le triangle des puissances est le suivant :



Citons les valeurs approximatives de  $\cos \phi$  des principaux actionneurs consommateurs d'énergie réactive :

- moteur asynchrone à 100 % de charge :  $\cos \phi = 0,85$
- moteur asynchrone à 50 % de charge :  $\cos \phi = 0,73$
- lampes à fluorescence :  $\cos \phi = 0,5$
- chauffage par induction :  $\cos \phi = 0,5$

Ces quelques exemples montrent l'impact très important de la partie réactive de la consommation énergétique des actionneurs qui comportent des circuits magnétiques : y remédier est une des problématiques de base de tout concepteur et installateur de produits et équipements électriques.

### g- Facteur de puissance

Le facteur de puissance est égal par définition à :

$$FP = \frac{P}{S} = \frac{\text{puissance active (W)}}{\text{puissance apparente (VA)}} \quad (\text{III.12})$$

Si les courants et tensions sont des signaux parfaitement sinusoïdaux, le facteur de puissance est égal à  $\cos \phi$ .

On utilise également la variable  $\text{tg} \phi$ . Dans les mêmes conditions, nous avons la relation :

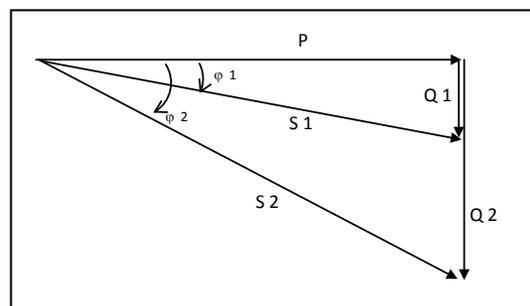
$$\text{tg} \phi = \frac{Q}{P} = \frac{\text{puissance réactive (var)}}{\text{puissance active (W)}}$$

L'objectif de la compensation d'énergie réactive est de réduire le courant appelé sur le réseau. L'énergie réactive est fournie par des condensateurs, au plus près des charges inductives.

Sur une période de temps donnée, nous avons également :

$$\text{tg} \phi = \frac{E_r}{E_a} = \frac{\text{énergie active consommée (kvarh)}}{\text{énergie active consommée (kWh)}}$$

La circulation de l'énergie réactive a des incidences techniques et économiques importantes. En effet, pour une même puissance active  $P$ , il faut fournir d'autant plus de puissance apparente, et donc de courant, que la puissance réactive est importante.



Ainsi, du fait d'un courant appelé plus important, la circulation de l'énergie réactive sur les réseaux de distribution entraîne :

- des surcharges au niveau des transformateurs,
- l'échauffement des câbles d'alimentation,
- des pertes supplémentaires,
- des chutes de tension importantes.

- La compensation de l'énergie réactive

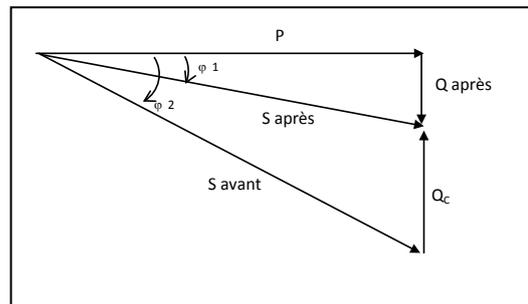
Pour les raisons évoquées ci-dessus, il est nécessaire de produire l'énergie réactive au plus près possible des charges, pour éviter qu'elle ne soit appelée sur le réseau. C'est ce qu'on appelle "compensation de l'énergie réactive". Pour inciter à cela et éviter de sur-calibrer son réseau, le distributeur d'énergie pénalise financièrement les consommateurs d'énergie réactive au-delà d'un certain seuil.

Pour fournir l'énergie réactive aux récepteurs inductifs, on utilise :

- des condensateurs lorsque la demande d'énergie réactive est relativement constante ;
- un compensateur synchrone (machine synchrone à vide) lorsque la demande d'énergie varie dans de très larges proportions.

Pour réduire la puissance apparente absorbée au réseau de la valeur  $S_2$  à la valeur  $S_1$ , on doit connecter une batterie de condensateurs fournissant l'énergie réactive  $Q_c$ , telle que

$$Q_c = P \cdot (tg\varphi_2 - tg\varphi_1) \quad (\text{III.13})$$



L'intérêt économique de la compensation est mesuré en comparant le coût d'installation des batteries de condensateurs aux économies qu'elle procure.

Le coût des batteries de condensateurs dépend de plusieurs paramètres dont :

- la puissance installée,
- le niveau de tension,
- le fractionnement en gradins,
- le mode de commande,
- le niveau de qualité de la protection.

Le retour d'investissement est en général rapide dans une installation électrique, de l'ordre de 1 à 3 ans.

### h- Théorème de Boucherot : conservation des puissances active et réactive

Les réseaux électriques sont constitués par un ensemble de dipôles placés en parallèle ; certains sont producteurs (alternateurs, condensateurs) d'autres sont consommateurs. Le théorème de Paul Boucherot formulé en 1900 facilite l'analyse du fonctionnement de ces réseaux en considérant non les impédances, mais les puissances mises en jeu dans ces dipôles.

#### - Théorème de Boucherot

Dans un réseau électrique constitué de  $n$  dipôles ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), la puissance active  $P$  (respectivement la puissance réactive  $Q$ ) est égale à la somme algébrique des puissances actives  $P_k$  (respectivement des puissances réactives  $Q_k$ ) des dipôles. Ceci s'applique que les dipôles soient producteurs ou consommateurs, en actif comme en réactif, c'est-à-dire quel que soit le signe des termes  $P_k$  et  $Q_k$ .

$$P = \sum_{k=1}^n P_k \text{ et } Q = \sum_{k=1}^n Q_k \quad (\text{III.14})$$

Ce théorème permet de résoudre les exercices et problèmes concernant les puissances par le calcul. Il est valable aussi bien en monophasé qu'en triphasé.

La puissance apparente ne peut s'obtenir que par les relations :  $\vec{S} = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k$  (solution graphique) ou par le calcul avec  $S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2}$  (III.15)

#### i- Facteur de puissance : $\cos \varphi$

Il faut faire attention car il y a souvent confusion entre ce que l'on appelle le  $\cos \phi$  et le facteur de puissance, cela n'est pas la même chose. Le seul cas très exceptionnel où  $FP = \cos \phi$  se produit quand la tension et le courant tiré du réseau sont purement sinusoïdaux, autrement dit quasiment jamais (il y a toujours déformation, même minime).

Voici les différences avec les 4 cas possibles :

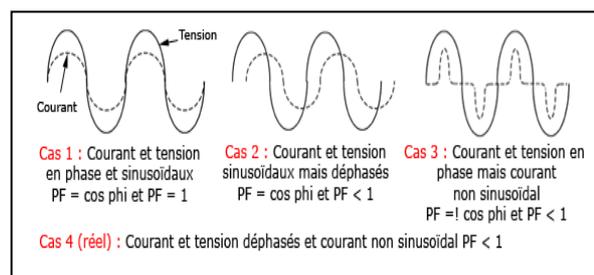
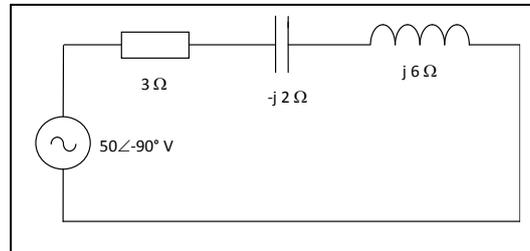


Figure III.10. Quartes cas possibles du déphasage

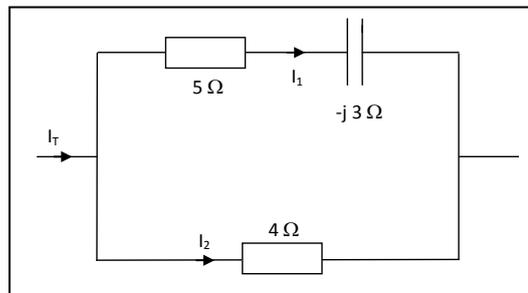
#### i- Exercices : puissances en alternatif monophasé

1. Tracer le triangle des puissances pour un circuit alimenté par une tension  $v = 150 \sin(\omega t + 10^\circ)$  où circule un courant  $i = 5 \sin(\omega t - 50^\circ)$ .

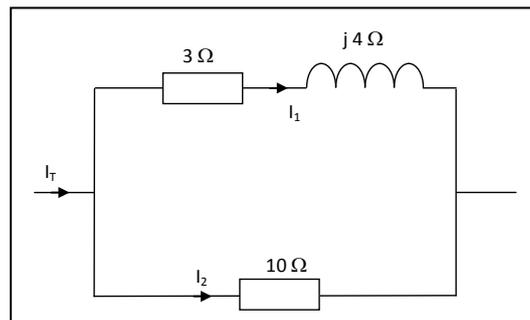
- La puissance dissipée dans un circuit série à deux éléments est de 940 W ; le facteur de puissance pour ce circuit est de 0,707 capacitif. Sachant que la tension appliquée est donnée par  $v = 99 \sin(6000t + 30^\circ)$ , déterminer la nature et la valeur des éléments du circuit.
- Tracer le triangle des puissances pour le circuit série suivant :



- Dans le circuit suivant circule un courant efficace total de 30 A. Déterminer les relations permettant de calculer P, Q et S pour ce circuit.



- La puissance totale dissipée dans le circuit parallèle est de 1000 W. Calculer la puissance dissipée dans chacune des résistances et déterminer l'intensité totale  $I_T$ .



➤ **Solutions**

63 On a  $\underline{V} = (150/\sqrt{2}) \angle 10^\circ$  et  $\underline{I} = (5/\sqrt{2}) \angle -50^\circ = 3,54 \angle -50^\circ$

La puissance complexe est alors :

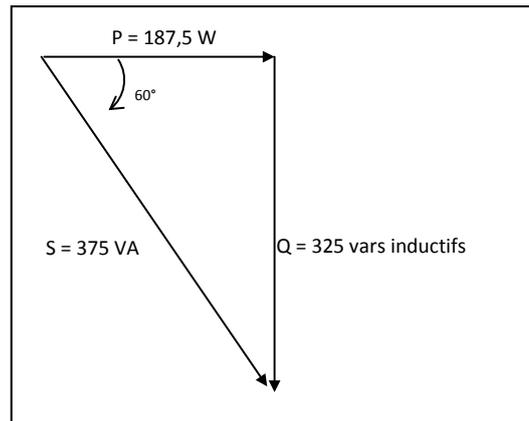
$$\underline{S} = \underline{V} \cdot \underline{I}^* = (106 \angle 10^\circ) \times (3,54 \angle 50^\circ) = 375 \angle 60^\circ \text{ VA} = 187,5 + j325 \text{ VA}$$

D'où l'on tire :  $P = \text{Re}(\underline{V} \cdot \underline{I}^*) = 187,5 \text{ W}$

$$Q = \text{Im}(\underline{V} \cdot \underline{I}^*) = 325 \text{ vars inductifs}$$

$$S = |\underline{V} \cdot \underline{I}^*| = 375 \text{ VA}$$

$$FP = \cos 60^\circ = 0,5 \text{ inductif}$$



2. La tension appliquée peut se mettre sous la forme complexe  $\underline{V} = (99/\sqrt{2}) \angle 30^\circ \text{ V} = 70 \angle 30^\circ \text{ V}$ .

La puissance active est donnée par  $P = VI \cos \varphi \Rightarrow I = \frac{940}{70 \cdot 0,707} \square 19 \text{ A}$  capacitif. Ce courant est donc en avance de  $\arccos 0,707 = 45^\circ$  sur la tension, par conséquent  $\underline{I} = 19 \angle 75^\circ \text{ A}$ .

L'impédance du circuit est  $\underline{Z} = \underline{V}/\underline{I} = \frac{70 \angle 30^\circ}{19 \angle 75^\circ} = 3,68 \angle -45^\circ \Omega = 2,6 - j2,6 \Omega$ .

Comme  $\underline{Z} = R - jX_C$  et que  $X_C = 1/\omega C$ , on a  $R = 2,6 \Omega$  et  $C = \frac{1}{6000 \times 2,6} \square 64,1 \mu\text{F}$ .

Autre méthode : en remplaçant I par sa valeur de 19 A dans  $P = RI^2$ , on obtient :

$$940 = 19^2 \times R \Rightarrow R \square 2,6 \Omega.$$

Nous avons alors  $\underline{Z} = Z \angle 45^\circ = 2,6 - jX_C$  et  $X_C = 2,6$  d'où nous tirons :

$$C = 1/\omega X_C = 64,1 \mu\text{F}$$

La Figure 1 nous permet d'écrire  $\underline{Z} = 3 + j6 - j2 = 5 \angle 53,1^\circ \Omega$  et

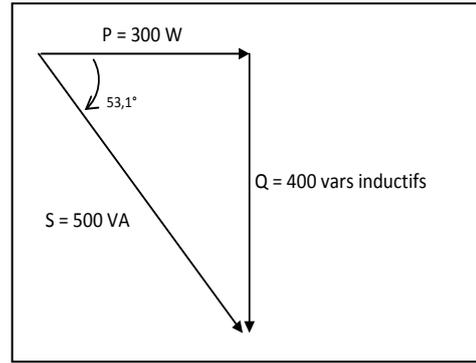
$$\underline{I} = \underline{V}/\underline{Z} = (50 \angle -90^\circ)/(5 \angle 53,1^\circ) = 10 \angle -143,1^\circ \text{ A}.$$

La puissance complexe est alors donnée par

$$\underline{S} = \underline{V} \cdot \underline{I}^* = (50 \angle -90^\circ) \cdot (10 \angle 143,1^\circ) = 500 \angle 53,1^\circ = 300 + j400 \text{ VA}$$

Les côtés du triangle des puissances représenté sont  $P = 300 \text{ W}$ ,  $Q = 400 \text{ vars inductifs}$

et  $S = 500 \text{ VA}$ , le facteur de puissance est  $\cos 53,1^\circ = 0,6$  inductif.



Autre méthode : en substituant  $I = 10$  A dans l'équation donnant la puissance pour chaque élément, on obtient  $P = RI^2 = 3 \cdot 10^2 = 300$  W,  $Q_{j6} = 6 \cdot 10^2 = 600$  vars inductifs,  $Q_{-j2} = 2 \cdot 10^2 = 200$  vars capacitifs

et  $Q = Q_{j6} + Q_{-j2} = 600 - 200 = 400$  vars inductifs.

4. En posant  $\underline{I}_T = 30 \angle 0^\circ$  A (on choisit l'argument le plus simple, rien n'étant imposé), on a :

$$\underline{I}_2 = 30 \angle 0^\circ \times \left( \frac{5 - j3}{9 - j3} \right) = 18,45 \angle -12,55^\circ \text{ A}$$

$$\text{et } \underline{I}_1 = 30 \angle 0^\circ \times \left( \frac{4}{9 - j3} \right) = 12,7 \angle 18,45^\circ \text{ A}$$

on peut alors écrire les relations suivantes :

$$P = R_4 I_2^2 + R_5 I_1^2 = 4 \cdot (18,45)^2 + 5 \cdot (12,7)^2 = 2165 \text{ W}$$

$$Q = X \cdot I_1^2 = 3 \cdot (12,7)^2 = 483 \text{ vars capacitifs}$$

$$\underline{S} = P - jQ = 2165 - j483 = 2210 \angle -12,6^\circ \Rightarrow S = 2210 \text{ VA}$$

$$FP = P/S = 2165/2210 = 0,98 \text{ capacitif}$$

Les puissances ci-dessus peuvent également être calculées à partir de

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{(5 - j3) \cdot 4}{9 - j3} = 2,4 - j0,533 \Omega. \text{ On obtient alors :}$$

$$P = R \cdot I^2 = 2,4 \cdot 30^2 = 2160 \text{ W}$$

Et  $Q = 0,533 \cdot 30^2 = 479,7$  vars capacitifs.

5. En se référant à la Figure 45, on peut écrire :

$$\underline{I}_1 = \frac{V}{\underline{Z}_1} = \frac{V}{3 + j4} = \frac{V}{5 \angle 53,1^\circ} \text{ et } \underline{I}_2 = \frac{V}{\underline{Z}_2} = \frac{V}{10}$$

Le rapport des modules des courants est  $\frac{I_1}{I_2} = \frac{V/5}{V/10} = \frac{2}{1}$ .

La relation  $P = R I^2$  permet de calculer le rapport des puissances dans la résistance de  $3 \Omega$  et dans celle de  $10 \Omega$  :

$$\frac{P_3}{P_{10}} = \frac{R_1 \cdot I_1^2}{R_2 \cdot I_2^2} = \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^2 = \frac{6}{5}$$

La puissance totale est donnée par  $P_T = P_3 + P_{10}$ . En divisant chaque membre de cette relation par  $P_{10}$ , on obtient  $P_T/P_{10} = P_3/P_{10} + 1$  d'où :

$$P_{10} = 1100 \cdot (5/11) = 500 \text{ W et } P_3 = 1100 - 500 = 600 \text{ W}.$$

Comme  $P = R \cdot I^2$ , on a  $3 \cdot I_1^2 = 600 \Rightarrow I_1 = 14,14 \text{ A}$ .

En posant  $\underline{V} = V \angle 0^\circ \text{ V}$ , on peut écrire :

$$\underline{I}_1 = 14,14 \angle -53,1 = 8,48 - j11,31 \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = 7,07 \angle 0^\circ = 7,07 \text{ A}$$

$$\underline{I}_T = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 15,55 - j11,31 = 19,25 \angle -36^\circ \text{ A}$$

L'ampèremètre indique 19,25 A.

## B-Systemes triphasés

### 1- Tensions et courants polyphasés

- a- Définition :** On appelle « tensions ou courants polyphasés » un ensemble de  $p$  tensions ou de  $p$  courants de même fréquence, ayant même amplitude et présentant entre eux des différences de phases de  $\frac{2\pi}{p}$ .

Dans la pratique, on rencontre surtout :

- Les tensions et les courants triphasés (déphasage de  $\frac{2\pi}{3}$ ) pour la production et le transport de l'énergie électrique.
- Les tensions et les courants hexaphasés (déphasage de  $\frac{\pi}{3}$ ) dans le cadre du redressement industriel afin d'obtenir des tensions continues présentant un faible taux d'ondulation résiduelle.

Dans la suite de ce cours, nous nous intéresserons uniquement au « triphasé ».

Durant la période 1880-1900, des industriels, tenants du « continu » et tenants de « l'alternatif » ont confronté leur réalisations. Le « triphasé » a fini par l'emporter.

Le triphasé possède les avantages suivants :

- Pour une puissance donnée, une ligne de transport triphasé demande moins de cuivre (ou d'aluminium) qu'une ligne monophasée de même tension (et aussi qu'une ligne continue).
- Les moteurs et les alternateurs triphasés sont plus petits, plus simples et moins coûteux que les moteurs et les alternateurs monophasés de même capacité de même tension et de même vitesse. L'écart est encore plus significatif avec le continu.

Le transport en triphasé permet d'économiser du câble et de diminuer les pertes par effet joule : 3 fils de phases suffisent (le neutre n'est pas transporté, il est "recréé" au niveau du dernier transformateur). En effet, le déphasage entre chaque phase est tel que, pour un système équilibré, la somme des trois courants est nulle (si les trois courants ont la même amplitude, alors:  $\cos(x) + \cos(x+2\pi/3) + \cos(x+4\pi/3)=0$ ). Et donc, en plus de faire l'économie d'un câble sur les longues distances, on économise les pertes par effets joules (un câble supplémentaire traversé par un courant impliquerait des pertes supplémentaires). On voit déjà là un grand intérêt à avoir choisi ces déphasages !

On peut essayer de faire comprendre l'avantage du système triphasé en le comparant à un moteur à essence. Un moteur à un seul cylindre peut être assimilé à une machine monophasée. De même, un moteur à trois cylindres peut se comparer à une machine électrique triphasée. Les pistons identiques montent et descendent à l'intérieur de cylindres identiques, mais pas en même temps. Il en résulte un moteur qui tourne avec moins de vibrations et qui peut être plus puissant...

Intérêt pour la production de l'électricité :

- De meilleurs alternateurs

Plus de 95 % de l'énergie électrique est produite par des alternateurs synchrones, des machines électromécaniques fournissant des tensions de fréquences proportionnelles à leur vitesse de rotation. Ces machines sont moins coûteuses et ont un meilleur rendement que les machines à courant continu (dynamos) qui délivrent des tensions continues (95 % au lieu de 85 %).

Les alternateurs (machines synchrones) triphasés qui produisent l'énergie électrique ont un meilleur rendement et un meilleur rapport puissance/poids qu'un alternateur monophasé de même puissance.

### **b- Système triphasé**

La Figure ci-dessus représente un alternateur triphasé élémentaire, les forces électromotrices induites dans les trois bobines identiques et décalées les unes par rapport aux autres de  $120^\circ$ , sont déphasées l'une par rapport à l'autre de  $\omega \cdot t = 120^\circ$ , soit deux tiers de période. En faisant tourner l'aimant dans le sens indiqué sur la figure, la f.é.m. est d'abord maximale dans une bobine (par exemple la n°1), suivie des maxima dans les bobines 2 et 3.

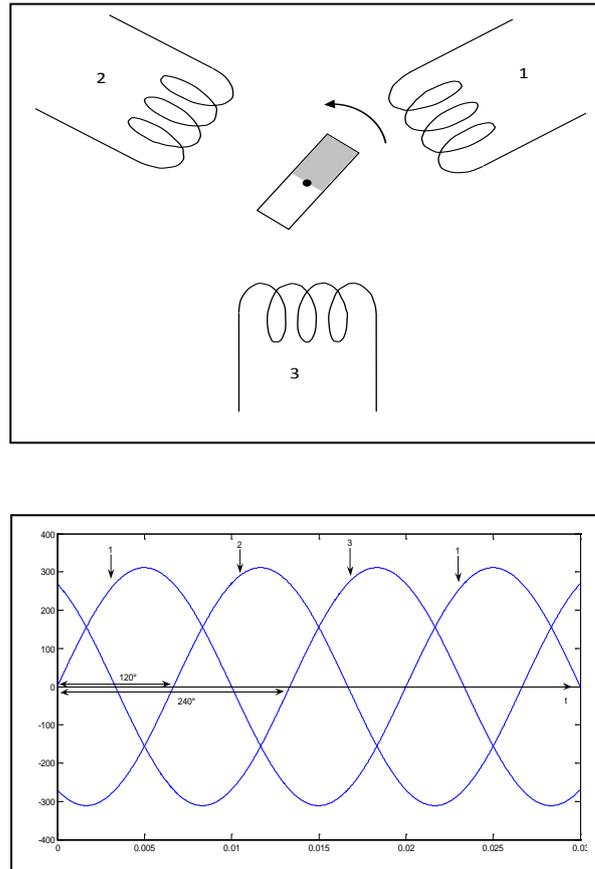
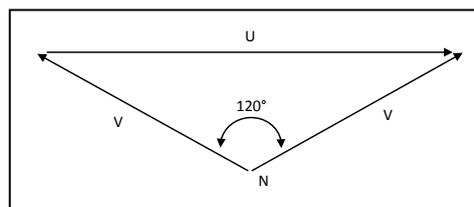


Figure III.11. Représentation d'un alternateur triphasé

**c- Relation entre tension simple et tension composée**

La figure montre qu'une tension composée est un vecteur obtenu par la différence entre deux tensions simples selon la figure suivante :



Le triangle de la figure ci dessus est isocèle (deux côtés égaux à V), donc les deux autres angles différents de 120° sont égaux et de valeur :  $\frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$ .

Dans ce triangle, on a :

$$U^2 = V^2 + V^2 - 2 \cdot V \cdot V \cdot \cos(120^\circ) = 2V^2 - 2 \cdot V^2 \cdot -\frac{1}{2} = 3 \cdot V^2 \Rightarrow U = \sqrt{3} \cdot V \quad (\text{III.16})$$

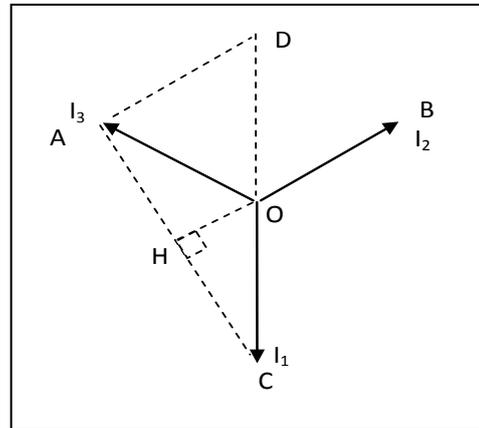
### d- Réseau équilibré

Le système est dit équilibré lorsque les 3 courants, absorbés sur les lignes par l'ensemble des récepteurs, ont la même intensité efficace. Les 3 vecteurs intensités sont déphasés de  $120^\circ$  les uns par rapport aux autres.

La somme des trois courants est constamment nulle :

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

$$\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 = 0$$



La différence de deux courants est égale à l'intensité de l'un des courants multipliée par  $\sqrt{3}$ . Elle est déphasée de  $\frac{\pi}{2}$  par rapport au troisième courant, ainsi, si  $i_2 = I_{MAX} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$  :

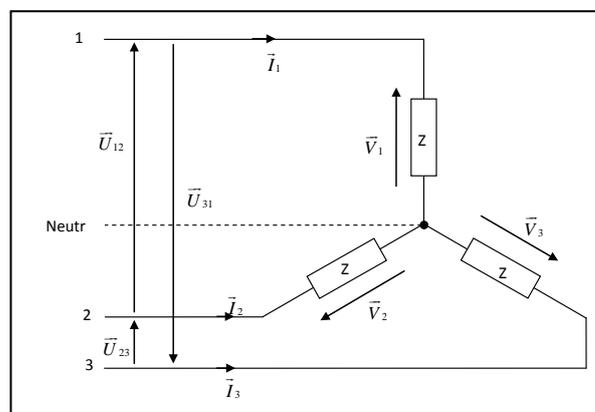
$$i_3 - i_1 = \sqrt{3} \cdot I_{MAX} \cdot \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Les montages utilisés avec les courants triphasés sont de deux sortes :

- les montages en "étoile",
- les montages en "triangle".

- **Montage en étoile (Y)**

Pour que le montage soit équilibré, les trois impédances groupées en étoile sont identiques.



*Figure III.12. Montage étoile équilibré*

Dans le cas du montage étoile, les courants des lignes d'alimentation sont identiques à ceux qui traversent les trois dipôles composant le récepteur.

Les d.d.p. aux bornes des 3 dipôles du récepteur sont des tensions simples.

Si le récepteur est équilibré, alors :

$$|\vec{I}_1| = |\vec{I}_2| = |\vec{I}_3| = I \tag{III.17}$$

- **Montage en triangle (D)**

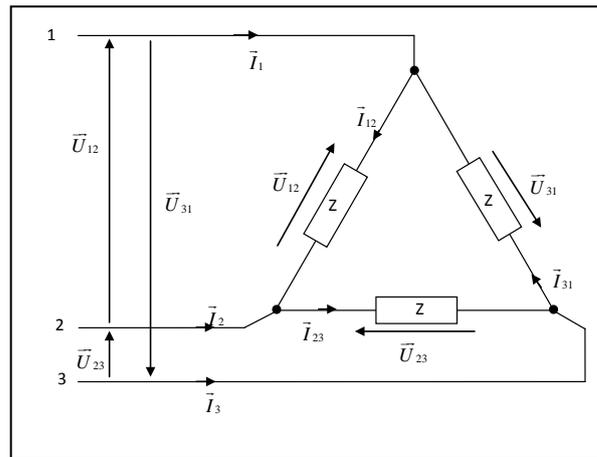


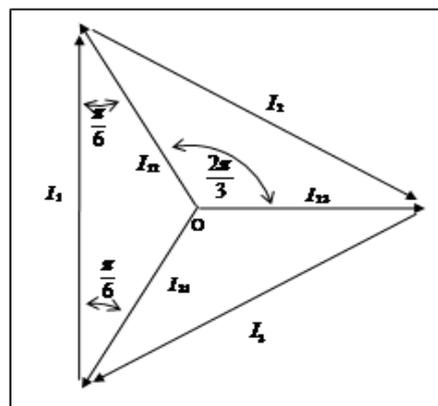
Figure III.13. Montage triangle équilibré

Les tensions aux bornes des 3 dipôles constituant le récepteur sont les tensions composées U.

Par ailleurs, les équations de nœuds aux trois sommets du triangle permettent d'écrire :

$$\begin{cases} \vec{I}_1 = \vec{I}_{12} - \vec{I}_{31} \\ \vec{I}_2 = \vec{I}_{23} - \vec{I}_{12} \\ \vec{I}_3 = \vec{I}_{31} - \vec{I}_{23} \end{cases} \tag{III.18}$$

Le diagramme vectoriel des intensités est alors le suivant :



On constate que les trois intensités de ligne  $(\vec{I}_1, \vec{I}_2, \vec{I}_3)$  sont déphasées de  $\frac{2\pi}{3}$ , deux à deux. Elles ont également même module.

Par ailleurs, les intensités dans les dipôles du récepteur ont le même module :

$$|\vec{I}_{12}| = |\vec{I}_{23}| = |\vec{I}_{31}| = \frac{I}{\sqrt{3}} \quad (\text{III.20})$$

#### e- Puissance dissipée dans un montage triphasé

La puissance dissipée dans un montage triphasé est égale à la somme des puissances dissipées au niveau de chaque impédance de la charge.

Pour un récepteur équilibré constitué de trois impédances identiques  $Z$ , cette puissance est égale à trois fois la tension aux bornes d'un dipôle multipliée par l'intensité qui traverse un dipôle multipliée par le cosinus du déphasage introduit par le dipôle entre la tension aux bornes du dipôle et l'intensité qui le traverse.

Pour un montage en étoile, la tension aux bornes d'un dipôle est  $V = \frac{U}{\sqrt{3}}$  tandis que le courant dans chaque dipôle est égal au courant de ligne  $I$ . On a donc :

$$P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

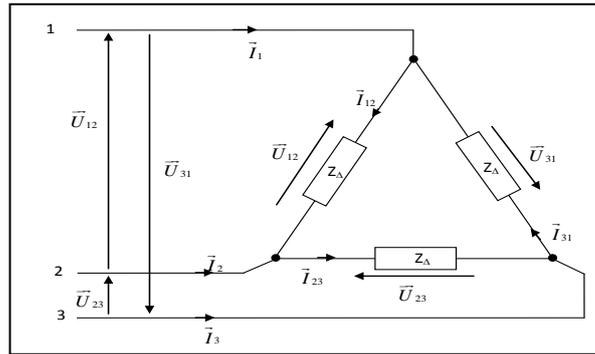
Pour un montage en triangle, la tension aux bornes d'un dipôle est  $U$  tandis que le courant traversant chaque dipôle est  $\frac{I}{\sqrt{3}}$ . On trouve également  $P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \varphi$

#### - Montage en triangle

Pour chaque dipôle  $Z_{\Delta}$  de la Figure 68, la tension aux bornes correspond à la tension composée et le courant à l'intensité absorbée sur les lignes d'alimentation divisée par  $\sqrt{3}$ . L'intensité traversant chaque dipôle est déphasée d'un angle  $\theta$  par rapport à la tension aux bornes (angle introduit par chaque impédance  $Z_{\Delta}$ ).

Ainsi, pour chaque dipôle, la puissance est  $P = U \cdot \frac{I}{\sqrt{3}} \cdot \cos \theta$ .

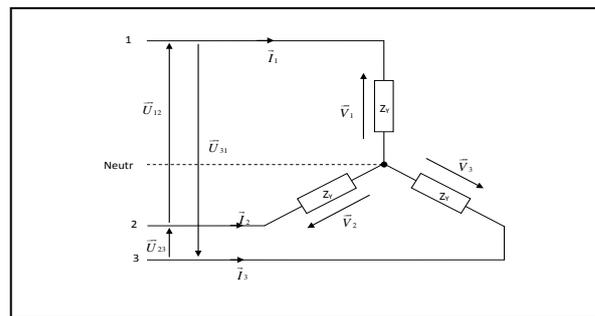
La puissance totale pour le récepteur est  $P_T = 3 \cdot U \cdot \frac{I}{\sqrt{3}} \cdot \cos \theta = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \theta$



### - Montage en étoile

Pour chaque dipôle  $Z_Y$  de la Figure 69, la tension aux bornes correspond à la tension simple  $\frac{U}{\sqrt{3}}$  et le courant est l'intensité absorbée sur les lignes. L'intensité traversant chaque dipôle est déphasée d'un angle  $\theta$  par rapport à la tension aux bornes (angle introduit par chaque impédance  $Z_Y$ ).

Ainsi, pour chaque dipôle, la puissance est  $P = V \cdot I \cdot \cos \theta = \frac{U}{\sqrt{3}} \cdot I \cdot \cos \theta$ .



Donc, pour le récepteur triphasé :  $P_T = 3 \cdot \left( \frac{U}{\sqrt{3}} \cdot I \cdot \cos \theta \right) = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \theta$ .

On retrouve la même formule que pour un récepteur en triangle.

Conclusion :

Pour un système triphasé équilibré quelconque, la puissance totale est donnée par :

$P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \theta$  où  $\theta$  est l'angle de déphasage introduit par une des 3 impédances du récepteur entre la tension à ses bornes et le courant qui le traverse.

Par extension de cette formule, on déduit les formules donnant la puissance réactive d'un système triphasé équilibré ainsi que celle donnant la puissance apparente :  $Q = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \sin \theta$  et  $S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I$

### f- Mesure de puissance en triphasé

La puissance active se mesure à l'aide d'un wattmètre. Le wattmètre est un instrument constitué d'une bobine de tension et d'une bobine de courant disposée de telle sorte que l'indication (déviations d'une

aiguille ou nombre apparaissant sur un afficheur) soit proportionnelle à  $V \cdot I \cdot \cos \theta$ , où  $\theta$  est le déphasage entre la tension et le courant.

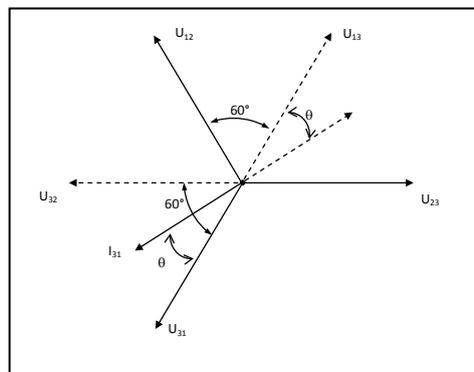
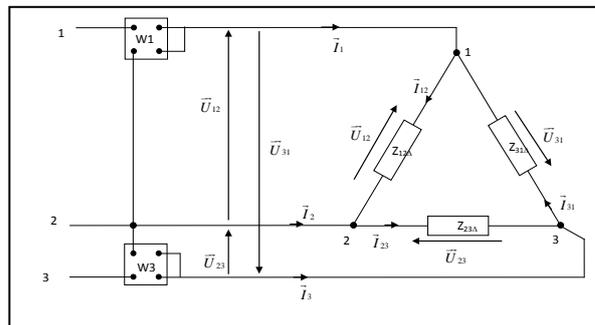
➤ **Méthode des deux wattmètres : Charges quelconques**

La puissance totale d'un système triphasé à trois conducteurs est donnée par la somme des indications de deux wattmètres disposés dans n'importe lesquelles des phases avec les bobines de tension connectées au troisième conducteur.

Les indications des wattmètres sont :  $W_1 = U_{12} \cdot I_1 \cdot \cos \theta_1^{12}$  et  $W_3 = U_{32} \cdot I_3 \cdot \cos \theta_3^{32}$

En appliquant la loi des nœuds aux nœuds 1 et 3 de la charge connectée en triangle, on peut écrire :

$$\vec{I}_1 = \vec{I}_{12} - \vec{I}_{31} = \vec{I}_{12} - \vec{I}_{13} \quad \text{et} \quad \vec{I}_3 = \vec{I}_{31} - \vec{I}_{23} = \vec{I}_{31} - \vec{I}_{32}$$



En substituant les expressions de  $I_1$  et  $I_2$  dans les équations du wattmètre, on obtient :

$$W_1 = U_{12} \cdot I_{12} \cdot \cos \theta_{12}^{12} + U_{13} \cdot I_{13} \cdot \cos \theta_{13}^{12}$$

$$W_3 = U_{32} \cdot I_{31} \cdot \cos \theta_{31}^{32} + U_{32} \cdot I_{32} \cdot \cos \theta_{32}^{32}$$

Les termes  $U_{12} \cdot I_{12} \cdot \cos \theta_{12}^{12}$  et  $U_{32} \cdot I_{32} \cdot \cos \theta_{32}^{32}$  sont immédiatement identifiés comme étant les puissances respectives des dipôles 1-2 et 3-2 du récepteur. Les deux termes restant contiennent  $U_{12} \cdot I_{13}$  et  $U_{32} \cdot I_{31}$  qui peuvent s'écrire sous la forme  $U \cdot I_{13}$  du fait que  $U_{12}$  et  $U_{32}$  correspondent aux

tensions entre phases (alimentation triphasée équilibrée  $\Rightarrow U_{12} = U_{23} = U_{31} = U$ ) et que  $I_{13} = I_{31}$ .

Afin de déterminer ces deux termes, il suffit de construire le diagramme vectoriel, où l'on suppose que le courant  $I_{13}$  est en retard sur la tension  $U_{13}$  d'un angle  $\theta$ .

De ce diagramme, on déduit :  $\theta_{13}^{12} = 60^\circ + \theta$  et  $\theta_{31}^{32} = 60^\circ - \theta$

$W_1 + W_2 =$  puissance dipôle 1-2 + puissance dipôle 3-2

Or :  $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$  et  $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

D'où :

$$U \cdot I_{13} \cdot (\cos(60^\circ + \theta) + \cos(60^\circ - \theta)) = U \cdot I_{13} \cdot (\cos 60^\circ \cos \theta - \sin 60^\circ \sin \theta + \cos 60^\circ \cos \theta + \sin 60^\circ \sin \theta)$$

$$U \cdot I_{13} \cdot (\cos(60^\circ + \theta) + \cos(60^\circ - \theta)) = U \cdot I_{13} \cdot \cos \theta$$

Ainsi,  $U_{12} \cdot I_{13} \cdot \cos \theta_{13}^{12} + U_{32} \cdot I_{31} \cdot \cos \theta_{31}^{32}$  correspond à la puissance dans le dipôle.

Ainsi, la somme des indications données par les 2 wattmètres correspond à la puissance totale de la charge triphasée. Deux wattmètres suffisent à mesurer la puissance d'une charge triphasée, que celle-ci soit en triangle ou en étoile. En effet, le théorème de Kennelly indique que l'on peut remplacer la charge en triangle précédente par une charge en étoile équivalente.

### g- Méthode des deux wattmètres appliquée à des charges équilibrées

Considérons le circuit en étoile constitué par les 3 impédances identiques.

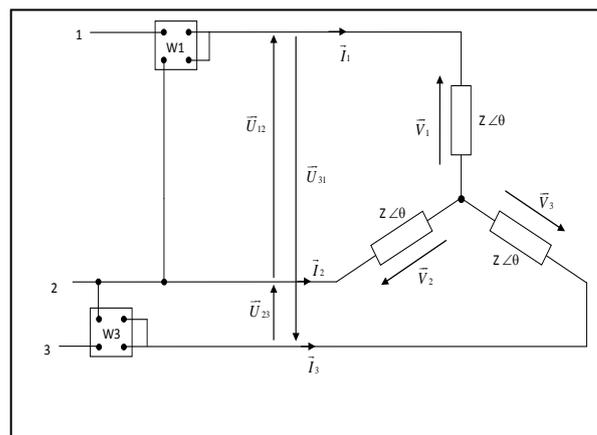
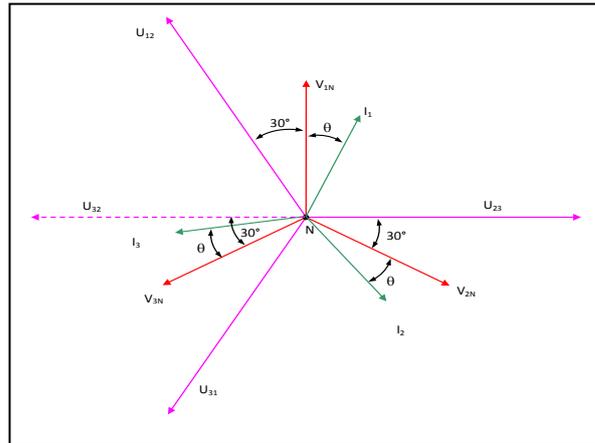


Figure III.14. Montage avec les deux wattmètres

Le diagramme vectoriel correspondant est tracé pour une séquence 123 en supposant que le courant est en retard sur la tension d'un angle  $\theta$ .



**Figure III.15.** Diagramme vectorielle

Des précédentes figures, il résulte que les indications des wattmètres mesurant les courants des phases 1 et 3 sont :

$$W_1 = U_{12} \cdot I_1 \cdot \cos \theta_1^{12} \text{ et } W_3 = U_{32} \cdot I_3 \cdot \cos \theta_3^{32}$$

$$\text{Où } \theta_1^{12} = 30^\circ + \theta \text{ et } \theta_3^{32} = 30^\circ - \theta$$

En substituant les deux équations, il vient :

$$W_1 = U_{12} \cdot I_1 \cdot \cos(30^\circ + \theta) \text{ et } W_2 = U_{32} \cdot I_3 \cdot \cos(30^\circ - \theta)$$

Avec une charge équilibrée, les indications des wattmètres sont  $W_1 = U \cdot I \cdot \cos(30^\circ + \theta)$  et

$W_2 = U \cdot I \cdot \cos(30^\circ - \theta)$  où  $\theta$  est le déphasage dû à l'impédance. Les deux indications peuvent être utilisées pour déterminer ce déphasage.

En développant les expressions de  $W_1$  et  $W_2$ , on obtient :

$$W_1 = U \cdot I \cdot (\cos 30^\circ \cos \theta - \sin 30^\circ \sin \theta)$$

$$W_2 = U \cdot I \cdot (\cos 30^\circ \cos \theta + \sin 30^\circ \sin \theta)$$

On en déduit :

$$\begin{cases} W_1 + W_2 = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cos \theta = P \\ W_2 - W_1 = U \cdot I \sin \theta = \frac{Q}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = W_1 + W_2 \\ Q = \sqrt{3}(W_2 - W_1) \end{cases}$$

$$\text{On en tire également : } \operatorname{tg} \theta = \sqrt{3} \left( \frac{W_2 - W_1}{W_1 + W_2} \right)$$

La tangente de l'angle de déphasage dû à l'impédance de charge  $\underline{Z}$  est égale à  $\sqrt{3}$  fois le rapport de la différence entre les indications des deux wattmètres à leur somme. Si l'on ne connaît pas ni les phases où sont placées les wattmètres, ni la séquence du système, il n'est pas possible de déterminer le signe du déphasage. Cependant, si aussi bien la séquence que l'emplacement des wattmètres sont connus, alors le signe du déphasage peut être déterminé par les expressions suivantes :

- Pour une séquence 123 :  $\tan \theta = \sqrt{3} \left( \frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2} \right) = \sqrt{3} \left( \frac{W_2 - W_3}{W_2 + W_3} \right) = \sqrt{3} \left( \frac{W_3 - W_1}{W_3 + W_1} \right)$

Pour une séquence 321 :  $\tan \theta = \sqrt{3} \left( \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1} \right) = \sqrt{3} \left( \frac{W_3 - W_2}{W_3 + W_2} \right) = \sqrt{3} \left( \frac{W_1 - W_3}{W_1 + W_3} \right)$

**Chapitre IV**  
**Circuits magnétiques**

## Chapitre IV : Circuits magnétiques [5-8]

### 1- Historique

C'est en 1819 qu'Hans-Christian Oersted, physicien danois, découvre qu'une aiguille aimantée, placée à proximité d'un fil métallique parcouru par un courant, est déviée de sa position d'équilibre.

En 1820, Jean-Baptiste Biot et Félix Savart étudient les propriétés de la force subie par un des « pôles magnétiques » d'une l'aiguille aimantée et Pierre-Simon de Laplace (1742-1827) traduit cette loi par une formule qui porte le nom de Biot et Savart. Laplace a également déterminé la formule permettant de calculer la force exercée sur un fil parcouru par un courant électrique et baigné par un champ magnétique.

André-Marie Ampère (1775-1836), assimilant un solénoïde parcouru par un courant à un aimant, crée la théorie de l'électrodynamique.

C'est Faraday qui montre la possibilité de transformer le travail mécanique en énergie électrique en 1831. En 1833, Lenz établit la loi qui donne le sens du courant induit. Henry publie en 1832 un mémoire sur l'auto-induction.

En 1855, Foucault démontre l'existence des courants qui portent son nom.

En 1865, Maxwell publie son « traité d'électricité et de magnétisme », véritable fondement de l'électromagnétisme moderne, achevant l'œuvre d'Ampère.

En 1887, Hertz utilise un détecteur de sa construction pour montrer que ces ondes électromagnétiques ont des propriétés analogues à celles de la lumière, ouvrant ainsi la voix à la radio-électricité et, à partir de 1904, à l'électronique.

### 2- Lois fondamentales en électrotechnique

Les phénomènes qui interviennent en électrotechnique sont basés sur trois lois :

- la loi de Biot et Savart ou le théorème d'Ampère,
- l'expression de la force de Laplace (ou de Lorentz),
- la loi de l'induction de Faraday et de Lenz.

En électrotechnique, les relations entre  $\vec{H}$  et  $\vec{B}$  sont simples.

Soit on considère comme matériau le vide ou l'air, alors :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad \text{avec} \quad \mu_0 = 4\pi 10^{-7} = \frac{1}{800000} \text{ SI perméabilité magnétique absolue du vide (ou de l'air).}$$

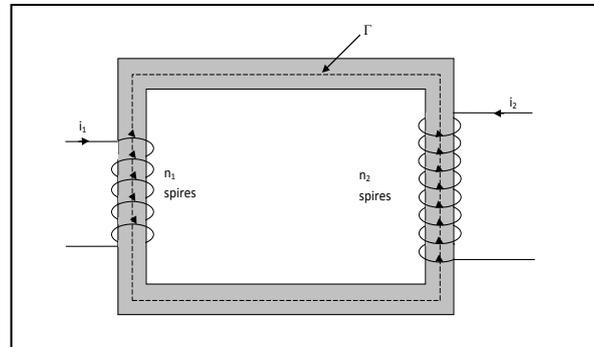
Soit on considère des matériaux à base de fer (ferromagnétiques) et on a :

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \quad \text{avec} \quad \mu = \mu_0 \cdot \mu_r, \quad \mu_r \text{ étant la perméabilité magnétique relative (au vide) du matériau considéré. Pour les matériaux ferromagnétiques, } 2000 \leq \mu_r \leq 10000.$$

- **Excitation magnétique créée dans un circuit magnétique de transformateur**

L'application correcte du théorème d'Ampère et sa généralisation au cas où plusieurs circuits électriques agissent en même temps pour créer un champ, implique de bien préciser les sens des courants et la façon dont la ligne d'induction  $\Gamma$  traverse ces courants.

Considérons, par exemple, le bobinage de transformateur :



*Figure IV.1. Présentation du bobinage dans un circuit magnétique*

Algébrisons le circuit en définissant un sens positif sur  $\Gamma$  : le sens des aiguilles d'une montre par exemple.

Les courants seront comptés positivement d'après la règle du tire bouchon de Maxwell : si le tire bouchon, que l'on tourne dans le sens de rotation de l'intensité, s'enfonce suivant le sens positif sur  $\Gamma$ , alors l'intensité est comptée positivement, négativement sinon.

On a ainsi :

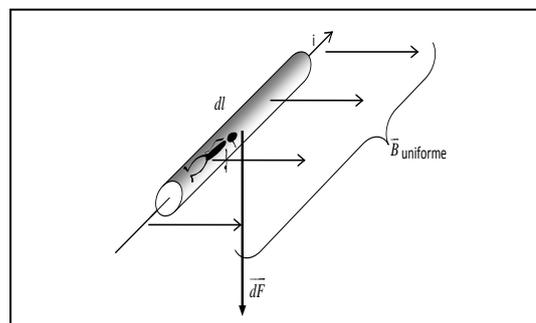
$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = n_1 i_1 - n_2 i_2 = H \cdot l \quad (\text{avec } l \text{ longueur de la ligne d'induction moyenne})$$

Si le noyau est homogène, H est la même partout, et on peut écrire :

$$H \cdot l = n_1 i_1 - n_2 i_2 \quad (\text{IV.1})$$

- **Force exercée par une induction magnétique sur un courant**

Si le fil est rectiligne, de longueur  $l$  et que le champ  $\vec{B}$  est perpendiculaire au fil, le module de la force a pour valeur (force de Laplace):



*Figure IV.2. Présentation de la force de Laplace*

Où :

$$F = Bil$$

### 3- Flux magnétique

Le flux magnétique est une quantité importante qui intervient constamment dans l'étude des machines électriques. C'est une grandeur scalaire qui se prête mieux aux calculs que le champ magnétique, grandeur vectorielle.

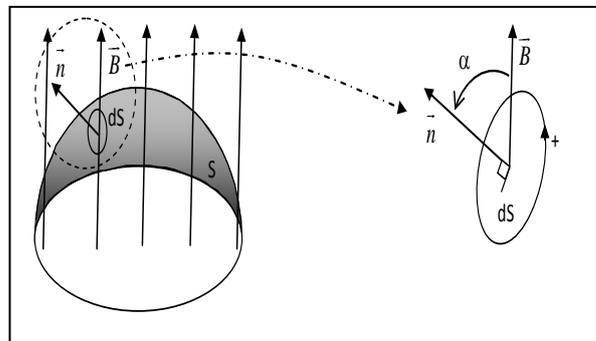
Le flux magnétique  $\Phi$  à travers une surface quelconque  $S$  est défini par la formule :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \iint_S B \cdot \cos \alpha \cdot dS, \quad \Phi \text{ est exprimé en Weber.}$$

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} S = BS \cos \alpha$$

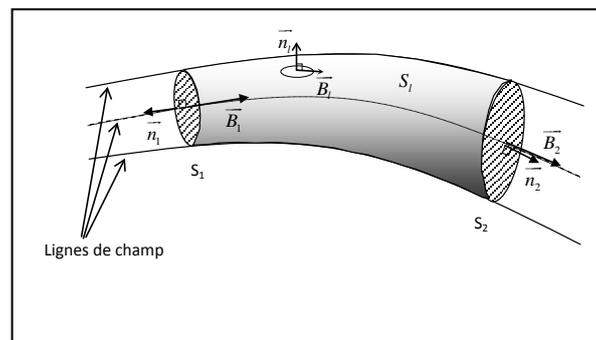
Si la surface est perpendiculaire aux lignes de champ ( $\alpha = 0$ ), l'expression devient :

$$\Phi = BS \tag{IV.2}$$



**Figure IV.3.** Distribution de flux sur une surface

La quatrième équation de Maxwell :  $\text{div} \vec{B} = 0$  indique que le flux du vecteur champ magnétique à travers une surface fermée est nul. En électrotechnique, les lignes de champ  $\vec{B}$  n'émanent pas de sources ponctuelles.



**Figure IV.4.** Présentation des lignes de champ

Le flux magnétiques sortant de  $\Sigma$  est nul (en orientant les normales vers l'extérieur) :

$$\Rightarrow -B_1 S_1 + B_2 S_2 = 0 \Rightarrow -\Phi_1 + \Phi_2 = 0$$

Le signe – devant  $\Phi_1$  indique qu'il s'agit d'un flux entrant.

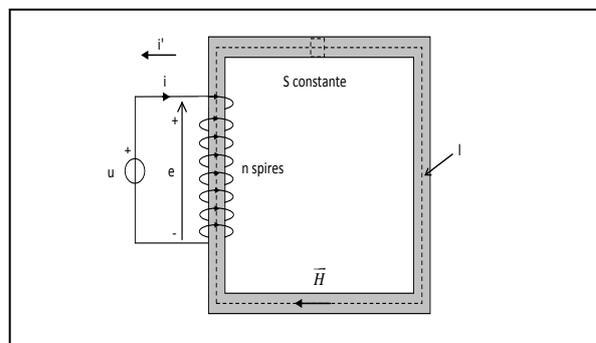
Le long d'un tube de champ, le flux magnétique se conserve, il ne dépend que du contour et non de la surface considérée :  $\Phi_1 = B_1 S_1 = B_2 S_2 = \Phi_2$

- **F.é.m. d'auto-induction**

Tout circuit électrique parcouru par un courant crée une f.é.m. d'auto-induction qui s'oppose à la source d'alimentation. Cet effet est beaucoup plus grand s'il s'agit d'une bobine (effet multiplié par le nombre de spires) et si les spires sont bobinées sur un noyau en fer qui concentre mieux le flux que l'air.

Considérons une bobine autour d'un noyau de section  $S$  constante et de longueur moyenne  $l$  alimentée par une source  $u$ , la circulation du courant  $i$  crée dans le noyau une excitation magnétique  $H = \frac{ni}{l}$  à

laquelle correspond le champ magnétique :  $B = \mu \frac{ni}{l}$ . (IV.3)



*Figure IV.5. Bobine autour d'un noyau de section  $S$*

Chaque spire du circuit, de surface  $S$ , est traversée par le flux du champ  $\vec{B}$

$$\Phi = B \cdot S = \mu \cdot \frac{ni}{l} \cdot S$$

Si le courant  $i$  est variable (alternatif par exemple), le flux l'est aussi et il apparaît donc aux bornes du circuit une f.é.m.  $e$  :

$$e = n \cdot \frac{d\Phi}{dt} = \frac{n^2}{l} \cdot \frac{di}{dt} \cdot \mu \cdot S$$

Le facteur de proportionnalité s'appelle **inductance propre** de la bobine

$$L = \frac{n^2}{l} \cdot \mu \cdot S \quad \text{exprimée en Henry (H).} \quad \text{(IV.4)}$$

La f.é.m. s'exprime alors sous la forme :

$$e = \frac{di}{dt} \quad (\text{IV.5})$$

Cette f.é.m. d'auto-induction s'oppose à la f.é.m.  $u$  qui alimente la bobine; elle a donc les polarités et tend à faire circuler le courant induit  $i'$  opposé à  $i$ .

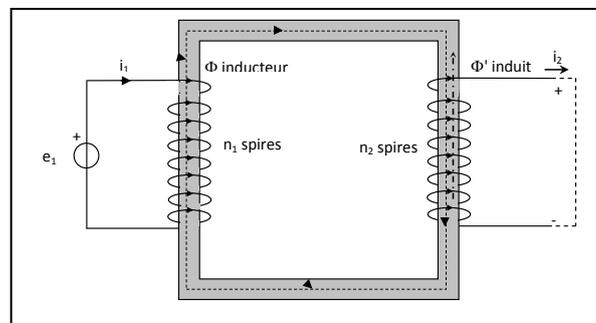
Si on néglige la résistance de la bobine, la loi des mailles s'écrit, à chaque instant :

$$u - e = 0$$

○ **F.é.m. de "transformation" produite par une variation du flux "embrassé"**

Une f.é.m. peut être créée aux bornes d'un circuit en faisant varier le flux qui le traverse par un moyen extérieur. Considérons le circuit suivant, un noyau ferromagnétique sur lequel on a bobiné :

1. un circuit n°1 comportant  $n_1$  spires parcourues par un courant  $i$  alternatif créé par la source de tension alternative  $u$ ,
2. un circuit n°2 comportant  $n_2$  spires en circuit ouvert.



**Figure IV.6.** Noyau ferromagnétique avec deux bobines

Le flux alternatif  $\Phi$ , dû à la circulation de  $i$ , traverse les deux circuits (on admet qu'il n'y a pas de fuite). Il apparaît donc aux bornes du circuit n°2 une f.é.m. "de transformation" :

$$e_2 = n_2 \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

la f.é.m. aux bornes du premier circuit vaut :

$$e_1 = n_1 \cdot \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \frac{e_2}{e_1} = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{IV.6})$$

A noter :

- Courants de Foucault

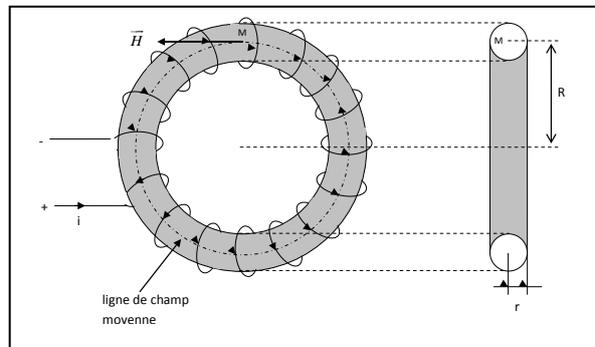
On appelle courant de Foucault le courant créé par le déplacement ou le changement du champ magnétique (courant d'induction) dans une masse métallique.

Feuilleteage d'un élément de circuit magnétique afin de réduire les courants de Foucault.

#### 4- Exercices avec solutions

4. On considère un tore de fer doux figure ci-dessous, de perméabilité magnétique relative  $\mu_r = 3200$ . Ce tore possède un rayon moyen  $R = 5$  cm, sa section est celle d'un disque de rayon  $r = 0,80$  cm.

On enroule 500 spires de fil de cuivre autour du tore.



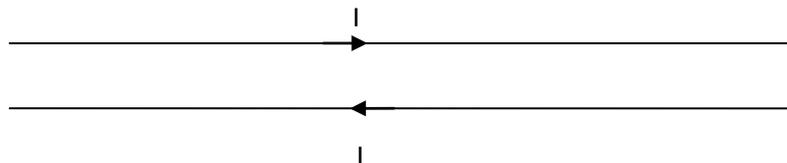
4.1. A l'aide du théorème d'Ampère, calculer l'excitation magnétique  $|\vec{H}|$  qui règne dans le tore si les spires sont parcourues par 1 A.

4.2. Calculer le champ magnétique  $|\vec{B}|$  qui règne dans le tore

4.3. Calculer l'inductance  $L$  du solénoïde enroulé sur le tore (on admettra que  $\mu$  est constante).

4.4. On admet que la résistance des 500 spires est négligeable. Déterminer la courbe  $i = f(t)$  donnant l'évolution de l'intensité  $i$  en fonction du temps si l'on branche le solénoïde sur une source de tension continue de 12 V. Combien de temps faut-il pour que l'intensité atteigne 30 A ?

5. On considère deux barres de cuivre rectilignes de longueur infinie. Elles sont écartées de 10 cm et traversées chacune par une intensité  $I$  de 50000 A lors d'un court circuit.



Calculer la force de Laplace exercée par mètre de longueur de barre. Le sens des courants étant donné par la figure ci-dessus, représenté le sens de la force exercée sur chacune des barres.

6. Une bobine possédant une inductance de 3 H est traversée par un courant de 50 A.

Calculer :

- La valeur de l'énergie emmagasinée dans le champ magnétique ;
- L'énergie débitée par la bobine si le courant diminue de 50 A à 30 A ;
- La tension induite aux bornes de la bobine ainsi que la puissance débitée si cette diminution de 50 A à 30 A se fait uniformément en 30 millisecondes.

- Solutions

4.

$$H = \frac{ni}{l} = \frac{ni}{2\pi R} = \frac{500}{2\pi \times 0,05} = 1592 \text{ A.tr}$$

$$B = \mu_0 \mu_r H = 6,36 \text{ T}$$

$$\Phi_{total} = n(B \cdot S) = n\mu_0 \mu_r HS = n\mu_0 \mu_r \frac{ni}{l} S \Rightarrow L = \frac{\Phi_{total}}{i} = \mu_0 \mu_r \frac{n^2}{l} S = 0,64 \text{ H}$$

$$e = L \cdot \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{e}{L} \Rightarrow i = \frac{e}{L} \cdot t \Rightarrow t = \frac{L}{e} \cdot i = \frac{0,64}{12} \cdot 30 = 1,6 \text{ s}$$

5. voir polycopié page 17 et 18  $F = \mu_0 \cdot \frac{i_1 \times i_2}{2\pi a} = \frac{1}{800000} \cdot \frac{50000^2}{2\pi \times 0,1} = 4973,6 \text{ N par mètre de longueur. Les barres tendent à s'écarter l'une de l'autre.}$

6. Pour un courant de 50 A, l'énergie conservée dans le champ vaut :

$$W_1 = \frac{1}{2} LI^2 = 3,75 \text{ kJ}$$

Lorsque l'intensité chute à 30 A, l'énergie conservée dans le champ devient :

$$W_2 = \frac{1}{2} LI^2 = 1,35 \text{ kJ}$$

La bobine a donc débité une énergie de :  $W_1 - W_2 = 3750 - 1350 = 2400 \text{ J}$

Cette énergie, puisée dans le champ magnétique, est restituée sous forme d'énergie électrocinétique au circuit sur lequel est branchée la bobine.

La tension induite aux bornes de la bobine est :  $e = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t} = 3 \cdot \frac{50 - 30}{0,03} = 2000 \text{ V}$

La puissance débitée par la bobine est :

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{3750 - 1350}{0,03} = 80 \text{ kW}$$

## 5- Magnétisation

La magnétisation qui reste lorsque  $\vec{H} = 0$  s'appelle magnétisation rémanente ( $B_r$ ).

Le champ nécessaire pour ramener  $B$  à zéro s'appelle le champ coercitif.

La surface de la boucle d'hystérésis représente l'énergie perdue lors du déplacement irréversible des parois. La perméabilité magnétique des milieux ferromagnétiques est très élevée et variable. L'état magnétique de tels matériaux est défini par une courbe représentant B en fonction de H dite courbe de magnétisation.

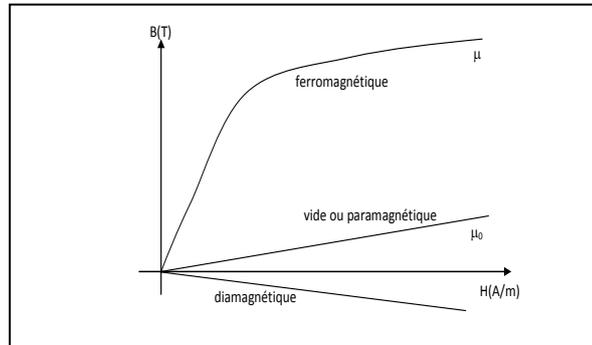


Figure IV.7. Courbe de magnétisation

### 6- Relation de Hopkinson

On peut utiliser l'analogie dite "analogie de Hopkinson" (ou encore loi d'Hopkinson) pour la mise en équation des circuits magnétiques afin de calculer les ampères tours nécessaires pour l'obtention d'un champ B donné ou inversement. Cette analogie ramène le calcul d'un circuit magnétique au calcul d'un circuit électrique, en considérant des quantités équivalentes. Il suffit, dès lors, d'appliquer les lois de Kirchhoff. La figure suivante montre un Circuit magnétique à 1 maille non homogène et son équivalent électrique

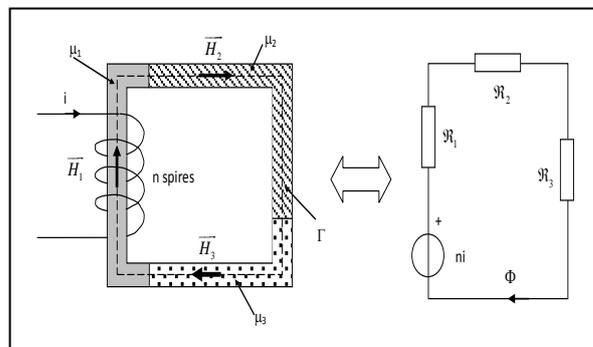


Figure IV.8. Présentation de circuit équivalent

Considérons le circuit magnétique de la figure, ce circuit possède une seule maille constitué de trois matériaux différents, de perméabilité magnétique  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ , et  $\mu_3$ . Le théorème d'Ampère appliqué au contour  $\Gamma$  donne :

$$H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + H_3 \cdot l_3 = ni \quad (\text{IV.8})$$

On peut écrire cette relation en introduisant le flux  $\Phi$  qui traverse le circuit : ce flux étant le même pour tout le noyau, le champ qui en résulte sera le même si la section est constante :

$$B = \frac{\Phi}{S} = \mu_1 H_1 = \mu_2 H_2 = \mu_3 H_3$$

La relation (1.34) peut donc s'écrire :

$$\left( \frac{l_1}{\mu_1 S} + \frac{l_2}{\mu_2 S} + \frac{l_3}{\mu_3 S} \right) \Phi = ni$$

En appelant réluctance d'une portion de circuit magnétique de longueur  $l$  et de section  $S$  la grandeur  $\mathcal{R} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{S}$ , grandeur analogue à la résistance ohmique d'un fil de longueur  $l$  et de section  $S$  ( $R = \rho \cdot \frac{l}{S}$ ), il vient :

$$\mathcal{R} = (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3). \Phi = n \cdot i \Leftrightarrow (R_1 + R_2 + R_3) I = E$$

Cette relation est une forme analogue à la loi d'Ohm pour un circuit électrique à une maille :

- la f.é.m.  $E$  est analogue à la f.m.m. (force magnétomotrice)  $ni$ ,
- l'intensité du courant électrique est analogue au flux  $\Phi$ ,
- la résistance électrique est analogue à la réluctance  $\mathcal{R}$  du circuit magnétique.

- **Analogie de Hopkinson :**

Quantité magnétique			Quantité électrique		
Force magnétomotrice	$ni$	At	Force électromotrice	$E$	V
Flux	$\Phi$	Wb	Courant	$I$	A
Réluctance	$\mathcal{R}$	At/Wb	Résistance	$R$	$\Omega$
Potentiel magnétique	$U$	At	Potentiel électrique	$V$	V

*Tableau IV.1. Analogie des quantités magnétiques en quantités électriques*

Cette analogie est un guide pratique lorsque l'on peut considérer la perméabilité magnétique  $\mu$  comme constante (résistance électrique constante).

**Chapitre V**  
**Transformateurs**

## Chapitre V : Transformateurs [5-8]

### 1- Définition

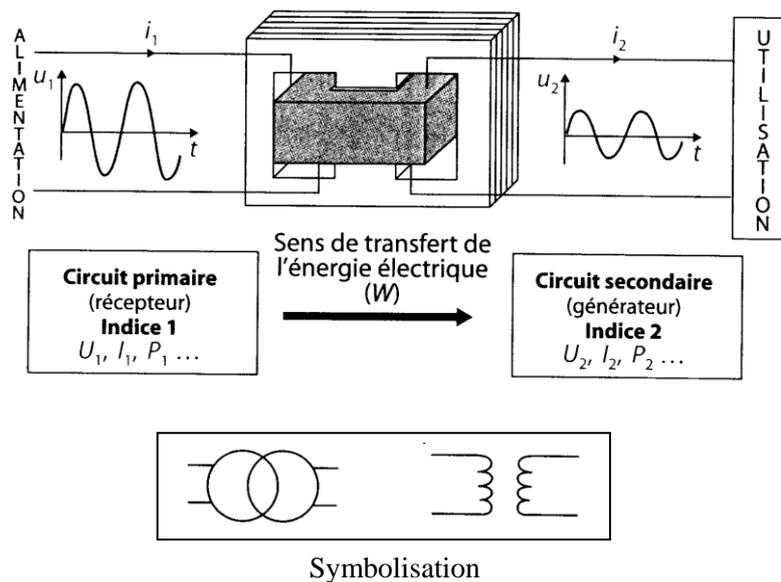
Le transformateur est une machine électrique permettant de modifier les amplitudes des grandeurs électriques alternatives (tension, courant).

### 2- Constitution

Un transformateur monophasé est constitué de :

- ✓ un circuit magnétique fermé, feuilleté et de grande perméabilité;
- ✓ un enroulement primaire alimenté par la source;
- ✓ un enroulement secondaire débitant sur les charges.

- Conventions et symbolisations.



*Figure V.1. Présentation schématique d'un transformateur monophasé*

- Rapport de transformation.

Nombre de spires	Tensions	Rôle du transformateur
$N_2 < N_1$	$U_2 < U_1$	abaisseur
$N_2 > N_1$	$U_2 > U_1$	élévateur
$N_2 = N_1$	$U_2 = U_1$	séparateur

*Tableau V.1. Détermination du rapport de transformation du transformateur*

### 3- Le transformateur parfait (idéal)

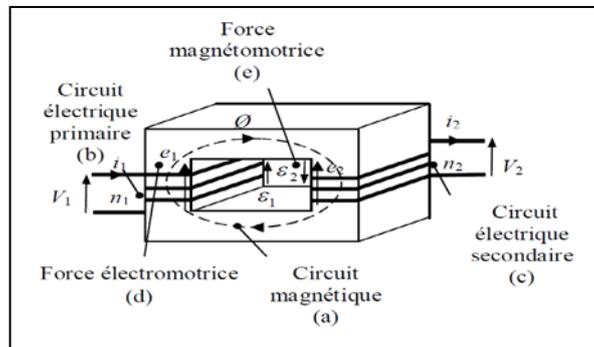


Figure V.2. Présentation schématique d'un transformateur parfait

- $e_1, e_2$  : (f.e.m) forces électromotrices;
- $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  : (f.m.m) forces magnétomotrices.

On désigne par un transformateur parfait lorsqu'il possède les caractéristiques suivantes :

- ✓ une réluctance du circuit magnétique très faible
- ✓ une résistance du circuit électrique pratiquement nulle
- ✓ les pertes joules sont nulles
- ✓ les pertes fer sont nulles

Les flux de fuite sont nuls, l'induction magnétique ( $B$ ) est uniforme dans le transformateur.

Les pertes par courant de Foucault sont liées directement à la variation temporelle du champ magnétique

Les pertes par hystérésis sont liées à la nature des matériaux

- Schéma équivalent

Un transformateur parfait sera représenté par le schéma suivant :

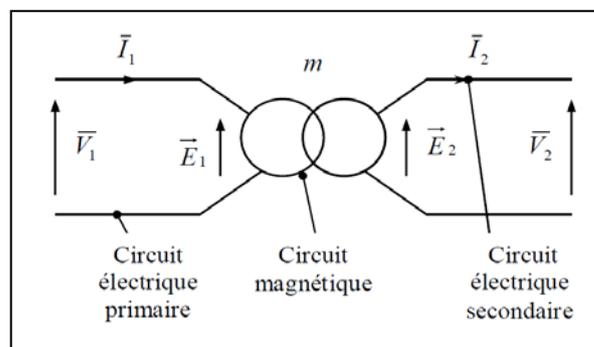


Figure V.3. Présentation du schéma équivalent du transformateur

### 4- Equations des tensions

La loi de Faraday :

$$e = - \frac{d\phi}{dt} \tag{V.1}$$

Soient :

- $\varphi$  : le flux élémentaire dans une spire.
- $\psi$  : le flux total dans  $n$  spires, tel que ;  $\psi = n \varphi$
- $e_1$  : la force électromotrice, convention récepteur  $e_1 = + \frac{d\psi_1}{dt}$
- $e_2$  : la force électromotrice, convention générateur  $e_2 = + \frac{d\psi_2}{dt}$

$$V_1 = e_1 = + \frac{d\psi_1}{dt} = + \frac{n_1 d\varphi_1}{dt}$$

$$V_2 = e_2 = + \frac{d\psi_2}{dt} = + \frac{n_2 d\varphi_2}{dt}$$

Puisque l'induction magnétique est uniforme dans le circuit magnétique "  $B_1 = B_2 = B$  ", et le flux élémentaire dans une spire

$$\varphi_1 = \frac{B_1}{S}, \varphi_2 = \frac{B_2}{S}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$$

On aboutie à la relation du rapport de transformation, défini par :

$$m = \frac{V_2}{V_1} = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{V.2})$$

Si :  $m = 1$ : le transformateur est un transformateur d'isolement.

$m > 1$ : le transformateur est un transformateur élévateur.

$m < 1$ : le transformateur est un transformateur abaisseur.

A noter : pour qu'il y ait "transformation", il faut que le flux soit variable en fonction du temps, soit, par exemple, un flux sinusoïdal tel que  $\frac{d\varphi}{dt} \neq 0$

- Relation de Boucherot

$$V_1 = 4,44 \cdot f \cdot B_{\max} \cdot S \quad (\text{V.3})$$

## 5- Transformateur réel

- **Schéma électrique équivalent à vide**

Le transformateur monophasé réel est équivalent à vide ( $i_2=0$ ) à une bobine à noyau ferromagnétique et peut donc se modéliser par le même schéma électrique :

Détermination de  $R_{\text{fer}}$  et de  $L_m$  : on mesure  $V_1$ ,  $I_{10}$  et  $P_{10}$

En négligeant l'influence la chute de tension aux bornes de  $l_{1f}$  et  $r_1$ , on a :

$$R_{\text{fer}} = \frac{V_1^2}{P_{10}} \quad (\text{V.4})$$

et

$$L_m w = \frac{V_1}{I_{10r}} \quad (\text{V.5})$$

Avec :

$$I_{10r} = \sqrt{I_{10}^2 - I_{10a}^2} \quad (\text{V.6})$$

et

$$I_{10r} = \frac{V_1}{R_{fer}}$$

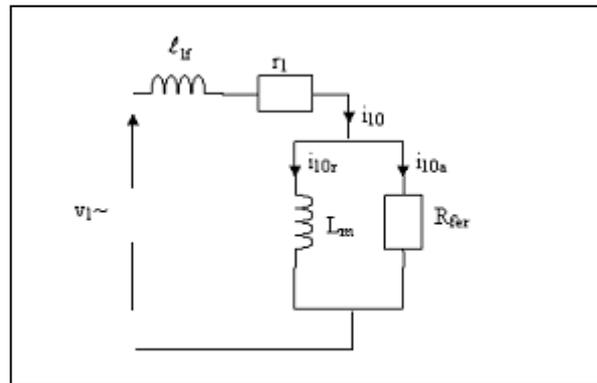


Figure V.4. Schéma électrique équivalent à vide

**Important :**

- en réalité, le courant  $i_{10}$  n'est pas sinusoïdal (circuit magnétique non linéaire)
- il apparaît au secondaire du transformateur une tension  $v_{20}$  telle que :

$$\frac{V_{20}}{V_1} = m$$

- **Schéma électrique équivalent en charge**

○ **Théorème d'Ampère**

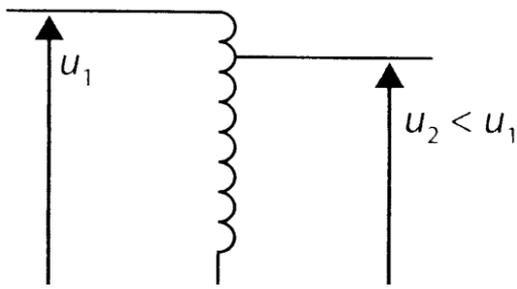
$$i_1 = i_{10} + m \cdot i_2 \quad (\text{V.7})$$

L'augmentation des Ampères-tours au primaire compense les Ampères-tours appelés au secondaire, le courant  $m \cdot i_2$  correspond au courant appelé au primaire par un transformateur parfait débitant au secondaire un courant  $i_2$ ; on en déduit le schéma équivalent au transformateur réel.

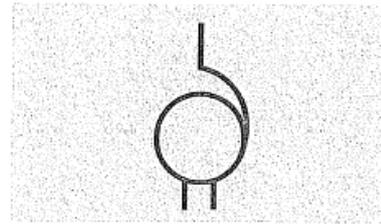
**6- Transformateurs particuliers**

**a- Autotransformateur**

- ✓ L'autotransformateur comporte un **enroulement unique** disposé sur un noyau du circuit magnétique. Une partie de l'enroulement est commune au primaire et au secondaire.
- ✓ Il existe des autotransformateurs à **secondaire fixe ou variable**, monophasés ou triphasés. Dans le cas d'un autotransformateur triphasé les curseurs sont liés mécaniquement.



Schématisation



Autotransformateurs, (pas d'isolation entre primaire et secondaire).

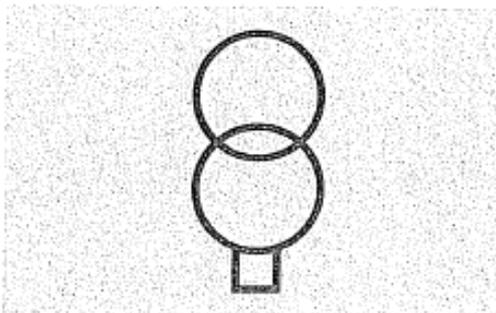
Symbolisation

Figure V.5. Schématisation et symbolisation d'un auto-transformateur

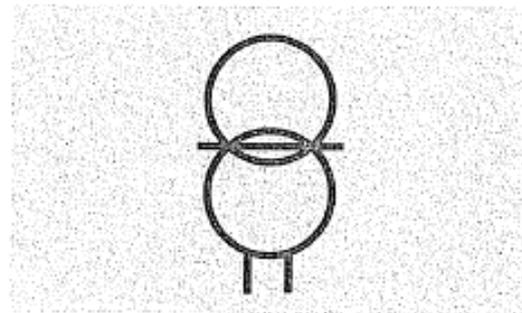
**A noter**

Il n'y a pas d'isolement entre les circuits d'alimentation et d'utilisation puisque le primaire et le secondaire sont constitués du même enroulement.

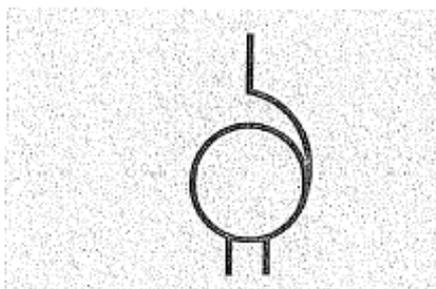
- Norme et symbolisation des transformateurs



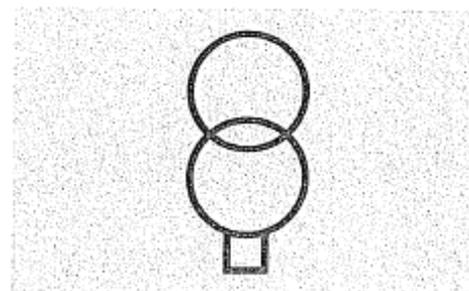
Transformateurs d'isolement résistant aux courts circuits.



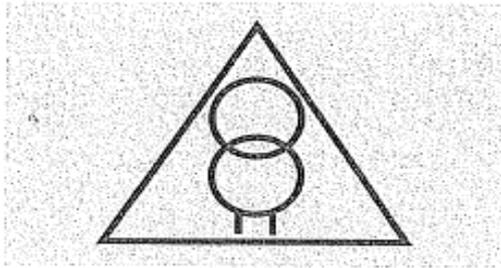
Transformateurs de séparation de circuits (isolation renforcée entre primaire et secondaire).



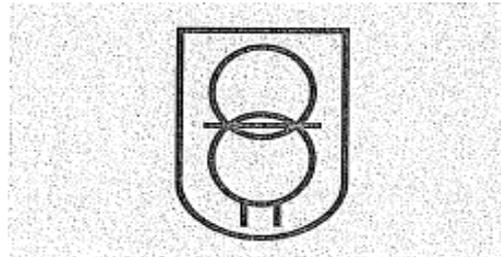
Autotransformateurs. (pas d'isolation entre pri



Transformateurs d'isolement résistant aux courts circuits.



Transformateurs de commande (isolation fonctionnelle entre primaire et secondaire).



Transformateurs de sécurité (isolation renforcée entre primaire et secondaire, tension à vide < 50 V).

Figure V.6. Normes et symbolisations des transformateurs

**b- Transformateurs de mesures**

Pour certaines mesures on peut avoir à utiliser des transformateurs de tension ( **TT** ), ou des transformateurs de courant à un seul enroulement ( **TC** ).

**c- Transformateur TT**

Utilisé en haute tension, ce transformateur réalisera une isolation galvanique entre le circuit de puissance et le circuit de mesure. Les tensions standardisées sont au secondaire 100v ou 110v entre phases.

**d- Transformateur de tension**

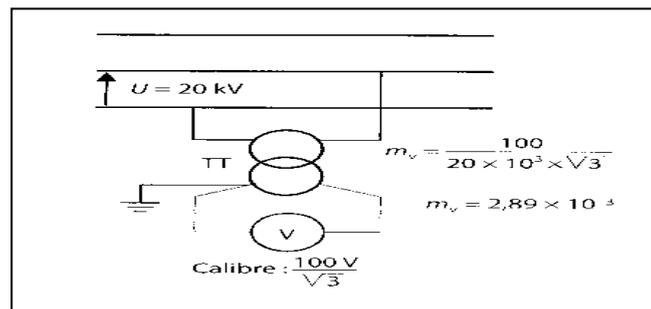


Figure V.7. Schéma électrique du transformateur de tension

**e- Le transformateur de courant à un seul enroulement TC**

D'une part, l'intensité du courant circulant dans un conducteur peut être très importante, d'autre part, son mesurage direct en haute tension est impossible pour des raisons évidentes de sécurité. Le conducteur de ligne (primaire) traverse une bobine torique (secondaire) aux bornes de laquelle est raccordé un ampèremètre de calibre 1A ou 5A. Transformateur de courant ou le conducteur de ligne constitue le primaire :

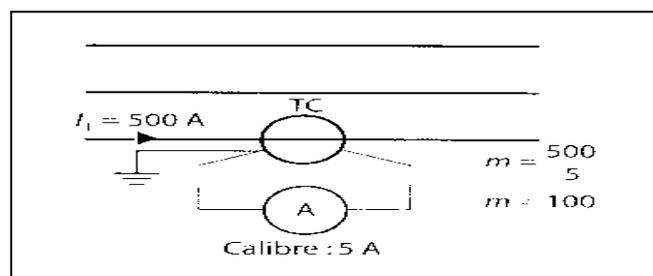


Figure V.8. Schéma électrique du transformateur de courant

### f- Transformateur d'impulsions

Le transformateur d'impulsions est utilisé pour la commande de thyristors, triac et transistors. Il présente par rapport à l'opto-coupleur, les avantages suivants: fonctionnement possible à fréquence élevée, simplification du montage, possibilité de fournir un courant important, bonne tenue en tension

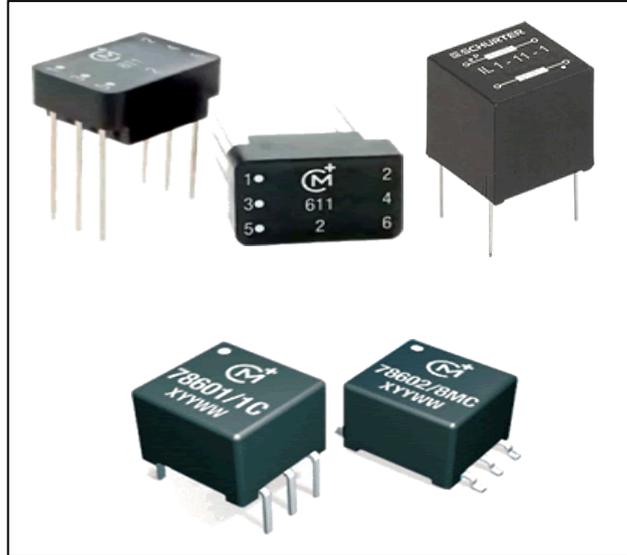


Figure V.9. Transformateur d'impulsions

### 7- Convention

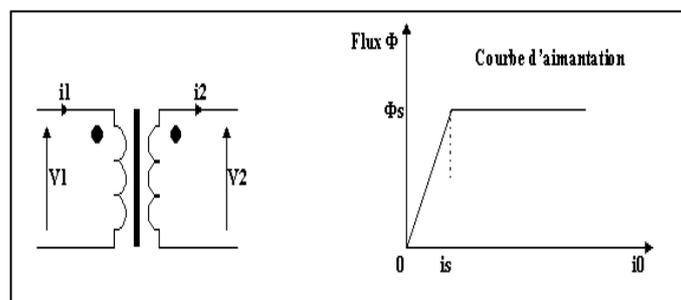


Figure V.10. Circuit équivalent et courbe d'aimantation du transformateur

$i_0$ : courant magnétisant (courant à vide). Rapport de transformation:  $m = \frac{i_1}{i_2} = \frac{V_2}{V_1}$

Une bonne utilisation du transformateur implique une absence de saturation du fer:  $\phi$  et  $i_0$  doivent toujours être inférieurs à  $\phi_s$  et  $i_s$ . Ceci entraîne un respect du " produit V.T " (constante donnée par le constructeur) et une démagnétisation totale entre chaque cycle de fonctionnement (diode, diode Zener, V.D.R.).

## **Chapitre VI**

### **Introduction aux machines électriques**

## Chapitre VI : Introduction aux machines électriques [8-9]

### 1- Présentation

- Dispositif électro- mécanique

Énergie électrique  $\longrightarrow$  Énergie mécanique : *Moteur*

Énergie mécanique  $\longrightarrow$  Énergie électrique : *Génératrice*

Une **seule et même** machine : conversion **dans les deux sens**

- Réversibilité :

Les machines électriques tournantes peuvent fonctionner en **moteurs** et en **génératrices** : elles sont dites **réversibles**.

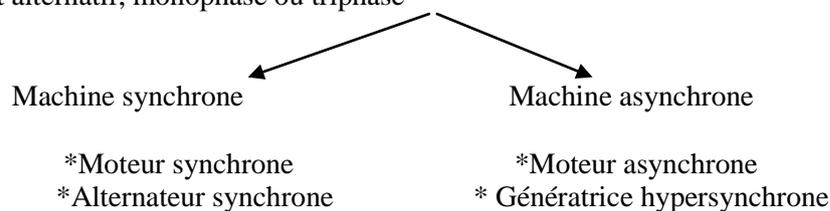
### 2- Type de machines électriques tournantes

Une machine électrique tournante peut fonctionner avec :

- Du courant continu  $\longrightarrow$  Machine à courant continu

\*Moteur à courant continu  
\*Dynamo (génératrice à courant continu)

- Du courant alternatif, monophasé ou triphasé



### 3- Lois de l'électromagnétisme

- ✓ Les machines électriques tournantes fonctionnent grâce à :
- ✓ La loi d'Ampère (ou de Biot et Savart)
- ✓ La loi de Laplace
- ✓ La loi de Faraday
- ✓ La loi de Lenz

#### ❖ La loi d'Ampère : (ou de Biot et Savart)

Courant dans un conducteur  $\longrightarrow$  champ d'induction magnétique **B**

-En **tout point** de l'espace (mais décroît en  $1/r_2$ )

-Courant et champ de **même nature**

- Courant continu  $\implies$  **B** continu
- Courant alternatif  $\implies$  **B** alternatif

On peut créer des champs magnétiques avec du courant

#### ❖ La loi de Laplace

Un conducteur parcouru par un courant **et** plongé dans un champ magnétique subit une force mécanique appelée **force de Laplace**.

- Conducteur libre       $\longrightarrow$       mouvement
- Technologie           $\longrightarrow$       contrôle du mouvement

Utilité :

On peut faire bouger des circuits avec des champs magnétiques.

#### ❖ La loi de Faraday

La force électromotrice  $e$  induite dans un circuit sous l'effet d'un champ magnétique est proportionnelle à la variation du flux magnétique  $\phi$ .

$$e = - \frac{d\phi}{dt} \begin{cases} \vec{B} \text{ variable induit } e \text{ variable} \\ \vec{B} \text{ continu n'induit pas de f.e.m} \end{cases}$$

Circuit fermé =====) naissance d'un courant

Utilité :

On peut induire des tensions et des courants (puissance électrique) à l'aide d'un champ magnétique

#### ❖ La loi de Lenz

Le sens du courant induit est tel que, par ses effets électromagnétiques, il **s'oppose** toujours à la cause qui lui a donné naissance

Utilité :

Décrit la conservation de l'énergie et permet d'établir les sens des tensions et des courants induits.

Convention générateur =====)  $e$  et  $I$  dans le même sens

### 4- Description d'une machine électrique tournante

- Point de vue mécanique
- Point de vue électrique

#### ❖ Éléments mécaniques

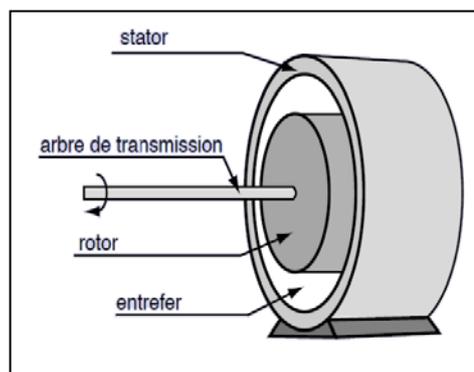


Figure VI.1. Présentation des éléments mécanique de la machine

- **Stator** : partie fixe, statique
- **Rotor** : élément entrant en rotation

Le rotor est lié à l'**arbre de transmission**

Le stator et rotor séparés par l'**entrefer**

#### ❖ Élément électrique :

Deux circuits électriques :

- **L'inducteur** :
  - . Créé le champ magnétique
  - . Permet le transfert d'énergie rotor / stator
  - . Courant  $i$
- **L'induit** :
  - . Siège de l'induction électromagnétique
  - . Expression des phénomènes physiques
  - . Création des nouvelles grandeurs (couple ou f.é.m + courant)
  - . Courant  $I$

#### 5- Rôles des éléments

Les rôles dépendent de la machine

- Selon la machine :

Stator = inducteur ou induit !

Rotor = inducteur ou induit !

- Pour une machine donnée :

Inducteur du moteur = inducteur de la génératrice

Induit du moteur = induit de la génératrice

3 types de machines utilisées :

- Machine à **courant continu**
- Machine **synchrone**
  - Rotor tourne à la même vitesse que le champ inducteur
- Machine **asynchrone**
  - Vitesse du rotor  $\neq$  vitesse du champ inducteur

#### 6- La machine à courant continu

Une machine à courant continu est une machine électrique tournante mettant en jeu des tensions et des courants continus.

2 tensions : induit  $U$  et inducteur  $u$

2 courants : induit  $I$  et inducteur  $i$

- *Les rails de Laplace : génération de f.é.m*
- 

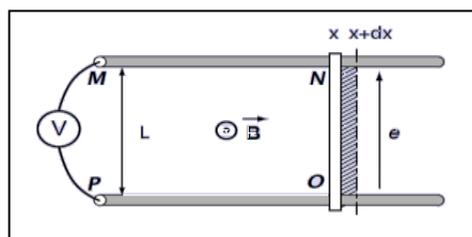


Figure VI.2. Rails de Laplace

MN et PO fixes et NO mobile

- B constant et uniforme
- Variation de surface =====)  $d\phi$

$$e = - \frac{d\phi}{dt} \tag{VI.1}$$

Elle mesurable avec un voltmètre

$$e = -BLv \longrightarrow \begin{cases} |e| \text{ augmente quand } B \text{ augmente;} \\ |e| \text{ augmente quand } v \text{ augmente;} \end{cases} \tag{VI.2}$$

$\vec{B}$  change de sens =====)  $e$  change de signe ;  
 $\vec{v}$  change de sens =====)  $e$  change de signe

**Même principe** dans une génératrice

**7- Les rails de Laplace : mise en mouvement**

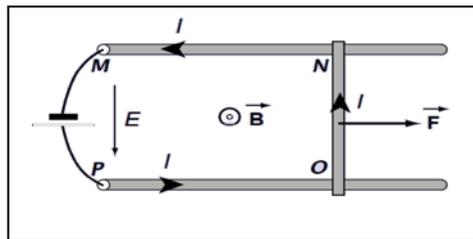


Figure VI.3. Mise en mouvement des rails de Laplace

- MN et PO fixes et NO mobile
- $\vec{B}$  constant et uniforme
- E tension continue
- Circulation d'un courant

Force de Laplace  $\vec{F}$  =====) Création d'un mouvement (ou flux maximum)

$$F = ILB \tag{VI.3}$$

F augmente quand B augmente ;  
 F augmente quand I augmente ;  
 $\vec{B}$  change de sens =>  $\vec{F}$  et  $\vec{v}$  changent de sens  
 E change de sens, I et  $\vec{v}$  changent de sens

**Même principe** dans un moteur

Le cadre tournant :

Rotation  $\longrightarrow$  lois de **Faraday** et de **Laplace**  
 $\vec{B}$  champ d'induction continu  
 On impose le mouvement =====) Faraday =====) Génératrice  
 On injecte un courant =====) Laplace =====) Moteur

### ❖ Technologie de la machine

Circuits électriques  $\longrightarrow$  Le collecteur et les balais

#### ○ Le stator :

Stator = inducteur

Crée le champ inducteur (continu)

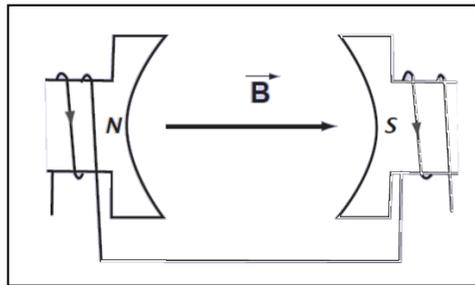


Figure VI.4. Création du champ inducteur

Peut-être composé :  
 - d'aimants permanents ( $i$  fixe)  
 - de bobinages ( $i$  réglable)

Courant inducteur = courant d'excitation =  $i$

#### ○ Le rotor :

Rotor = induit

Ensemble de **cadres tournants**

- Baigne dans le champ magnétique
- Siège de la **conversion électro-mécanique**
- Apparition d'un **couple** ou d'une **f.e.m**

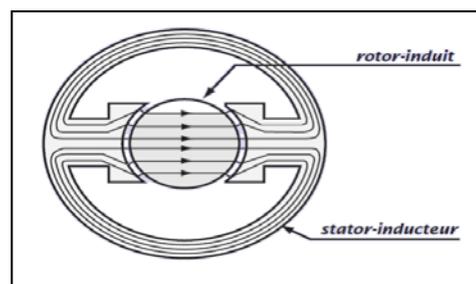


Figure VI.5. Rotor et lignes de champ

### ❖ Symbole électrique

Il en existe plusieurs, nous utiliserons :

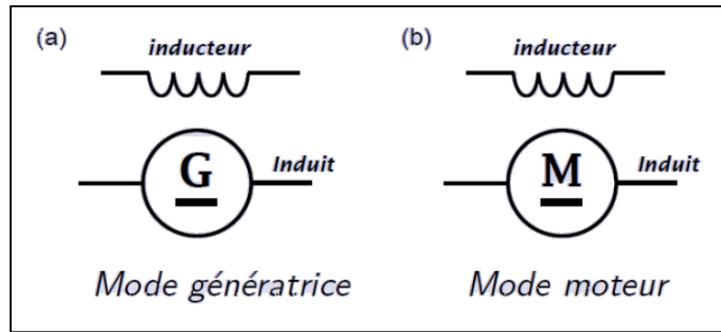


Figure VI.6. Présentation de symboles d'une machine

❖ **Technologie :**

Il faut inverser le courant

- Exemple **simplifié** pour 1 cadre
- 2 lames  $\longleftrightarrow$  1 cadre
- Balais (= charbons) **assurent le contact électrique**

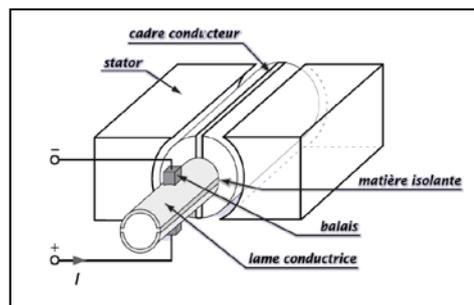


Figure VI.7. Balais et collecteur

## 8- Fonctionnement de la machine

Caractéristiques électriques

Montage électrique

- Machine : 1 circuit inducteur + 1 circuit induit
- Connexion en série : montage **série**
- Connexion en parallèle : montage **shunt**
- Connexion indépendante : montage à **excitation séparée**
- **Des caractéristiques différentes**

❖ Montage à excitation séparée

- Équations :

Shunt : on posera  $U = u$

Série : on posera  $I = i$

❖ Schémas électriques équivalents

- Définition

On appelle schéma électrique équivalent d'un circuit un schéma permettant de rendre compte du comportement électrique de ce circuit à l'aide de générateurs et de composants simples.

- Échauffement =) **résistance**
- Fuites de courant =) **conductance**
- Force électromotrice =) **dipôle polarisé**
- Pertes de flux magnétique (ALTERNATIF) =) **bobine**
- Effets capacitifs (ALTERNATIF) =) **condensateur**

Et pour la MCC?

- 2 Bobinages traversés par un courant continu
- Point de vue électrique =) échauffement =) résistance
- Induction d'une f.é.m dans l'induit =) dipôle polarisé

❖ Schémas électriques équivalents de la MCC

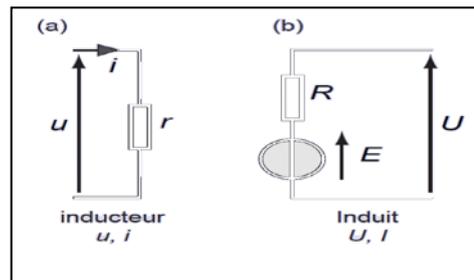


Figure VI.8. Schéma électrique de la machine

- $r$  résistance d'inducteur
- $R$  résistance d'induit
- $E$  force électromotrice ou contre électromotrice

Le sens du courant induit  $I$  : dépend du mode de fonctionnement

Moteur  $\longrightarrow$  Puissance mécanique  $\longrightarrow$   $E$  et  $I$  en sens inverses (récepteur)  
 Génératrice  $\longrightarrow$  Puissance électrique  $\longrightarrow$   $E$  et  $I$  dans le même sens

La force électromotrice

- . Rotor-induit : siège d'une f.é.m
  - . Vrai pour le moteur et la génératrice
    - . Force contre-électromotrice pour le moteur
    - . Rails de Laplace : f.é.m =  $f(B, v)$

$$E = K\phi\Omega \tag{VI.1}$$

avec  $K$  constante de la machine,  $\phi$  en Wb et  $\Omega$  en rad/s

- Puissance et couple électromagnétique
- Puissance électromagnétique :
  - Transmise entre rotor et stator (champ magnétique)
  - Convertie (électrique  $\longleftrightarrow$  mécanique)
  - En rapport avec  $E$  (et  $I$ )

$$P_{em} = EI \tag{VI.2}$$

Couple électromagnétique  $T_{em}$  : Appliqué par les forces de Laplace sur le rotor

$$T_{em} = \frac{P_{em}}{\Omega} = K \cdot \phi \cdot I \tag{VI.3}$$

$T_{em}$  proportionnel à  $I$

❖ **Fonctionnement en moteur**

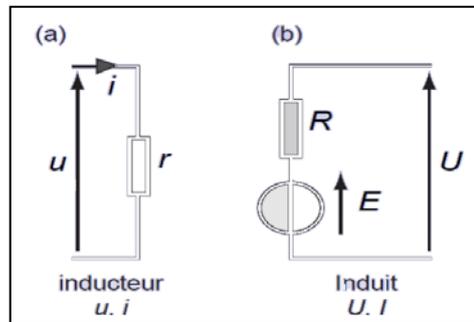


Figure VI.9. Fonctionnement en moteur

Mode moteur :

Une machine à courant continu fonctionne en mode moteur **si et seulement si**  $U > E$ .

L'induit **absorbe** le courant  $I$

Vitesse du moteur

Vitesse  $n$  (tr/s ou s<sup>-1</sup>) ou  $\Omega = 2\pi n$  (rad/s)

Usage : tr/min ou min<sup>-1</sup>

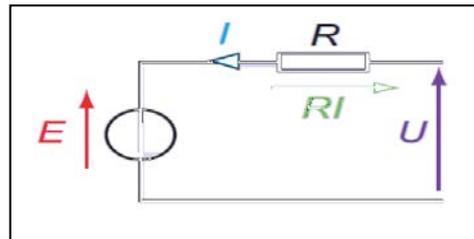


Figure VI.10. Circuit électrique correspondant

$$\implies U = E + RI$$

$$\Omega = \frac{U - RI}{K \cdot \phi} \tag{VI.4}$$

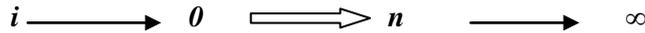
Deux remarques :

$$RI \ll U \implies \Omega \cong \frac{U}{K \cdot \phi} \tag{VI.5}$$

Commande du moteur :

U permet de contrôler la vitesse de rotation pour  $\phi$  donné.

$$n \propto \frac{U - RI}{i} \tag{VI.6}$$



**Emballlement du moteur**

Ne jamais couper l'inducteur d'un moteur à courant continu en fonctionnement. Risque d'emballement !

**9- Bilan des puissances du moteur à courant continu**

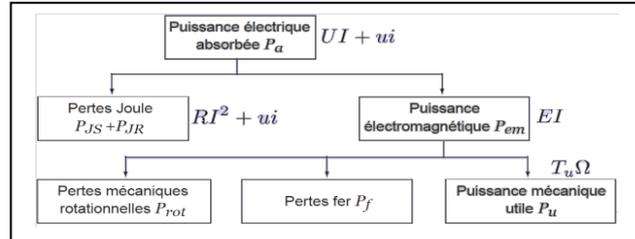


Figure VI.11. Bilan de puissance d'une mcc

$$P_{cste} = P_{rot} + P_f \text{ se mesurent à vide} \tag{VI.7}$$

10- Le rendement du moteur

Le rendement  $\eta$  du moteur est le rapport entre la puissance mécanique utile  $P_u$  et la puissance électrique absorbée  $P_a$ .

$$\eta = \frac{P_u}{P_a} (< 100\%) \tag{VI.8}$$

À vide :

- o Sans charge mécanique
  - o  $P_u = 0$  (moteur inutile)
  - o  $\eta = 0$

11- Couple utile d'un moteur à courant continu

$$P_u = P_{em} - P_{cste} \tag{VI.9}$$

et

$$T_u = T_{em} - T_{cste} \tag{VI.10}$$

Bilan des puissances :

$$T_u \propto \phi I$$

❖ **Commande du moteur**

Le courant  $I$  permet de contrôler le couple moteur pour  $\phi$  donné.

- o  $T_u$  et  $n$  sont contrôlables **indépendamment**
- o Faibles vitesses et forts couples
- o Idéal pour le **démarrage en charge**

**10- Démarrage du moteur à excitation séparée**

- Au démarrage :
  - o  $\Omega = 0 \implies E = 0$

- La résistance d'induit  $R$  est **petite**
- $I = U/R$  **très grand**
- Limiter la tension  $U$  :
  - Rhéostat de démarrage (=) n'est plus utilisé
  - Variateur de vitesse (hacheurs, tension variable)

- **Tension de démarrage**

Pour contrôler le courant, un moteur à excitation séparée doit être démarré à tension réduite.

❖ **Fonctionnement en génératrice**

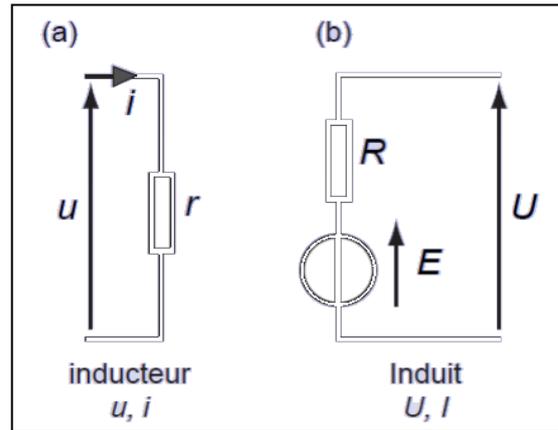


Figure VI.12. Schéma équivalent d'une génératrice

Une machine à courant continu fonctionne en mode génératrice **si et seulement si**  $E > U$ .

- L'induit **délivre** le courant  $I$
- $U = E - RI$  (on recalcule comme précédemment)

### 11- Bilan de la machine à courant continu

Avantages :

- Commande facile :  $U \longleftrightarrow n \text{ et } I \longleftrightarrow Tu$
- Connexion directe sur batteries possible
- Facilement réversible ( $U$  par rapport à  $E$ )
- Couple au démarrage réglable et important

Inconvénients :

- Emballement possible
- Tension au démarrage à contrôler
- Prix élevé
- Maintenance nécessaire
- Source importante de nuisances (étincelles)

## Références bibliographiques

- [1]. V.Smirbov, " Cours de mathématiques supérieurs", Edition Mir, tome I, Moscou 1969
- [2]. M.MartyL, D.Dixneuf , D.G. Gilabert, "Principes d'Electrothecnique" Dunod, paris 2005, ISBN 2 10 048550 4
- [3]. R.E.Ridsdale, " Circuits électriques", Editeurs McDraw-Hill 1976.
- [4]. J.A.Edminister,"Théorie et applications des circuits électriques", Série Schaum, université Akron, Editeurs McDraw-Hill 1972
- [5]. B. Lang, "libre reproduction Copyright" 1997.
- [6]. A. Le Nadan, G Sinou." Circuits électriques linéaires "techniques d'analyse", Editions Herman ; éditeurs des sciences et des arts 1996.
- [7]. J.Ferreira ; "Cours d'électrostatique-électrocinétique "deug SMA. Université J.Fourier
  
- [8]. M.Kostenko, L.Piotrovski , "Machines électriques" . Editions Mir. Moscou 1969,tome I, machines à courant continu. Transformateurs. Traduit du Russe par :Ch.BIB
- [9]. B.Saint-Jean, ing. "Electrotechnique et Machines électriques. Editions Lidec, Montreal ; Québec Canada et Editions Eyrolles, France.