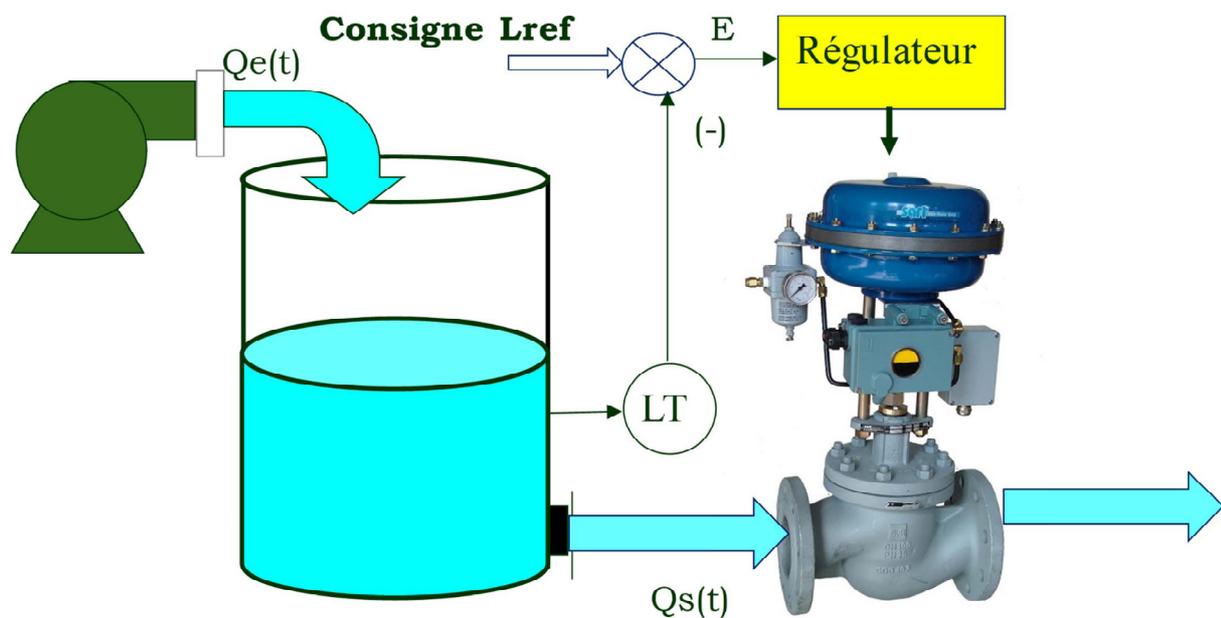




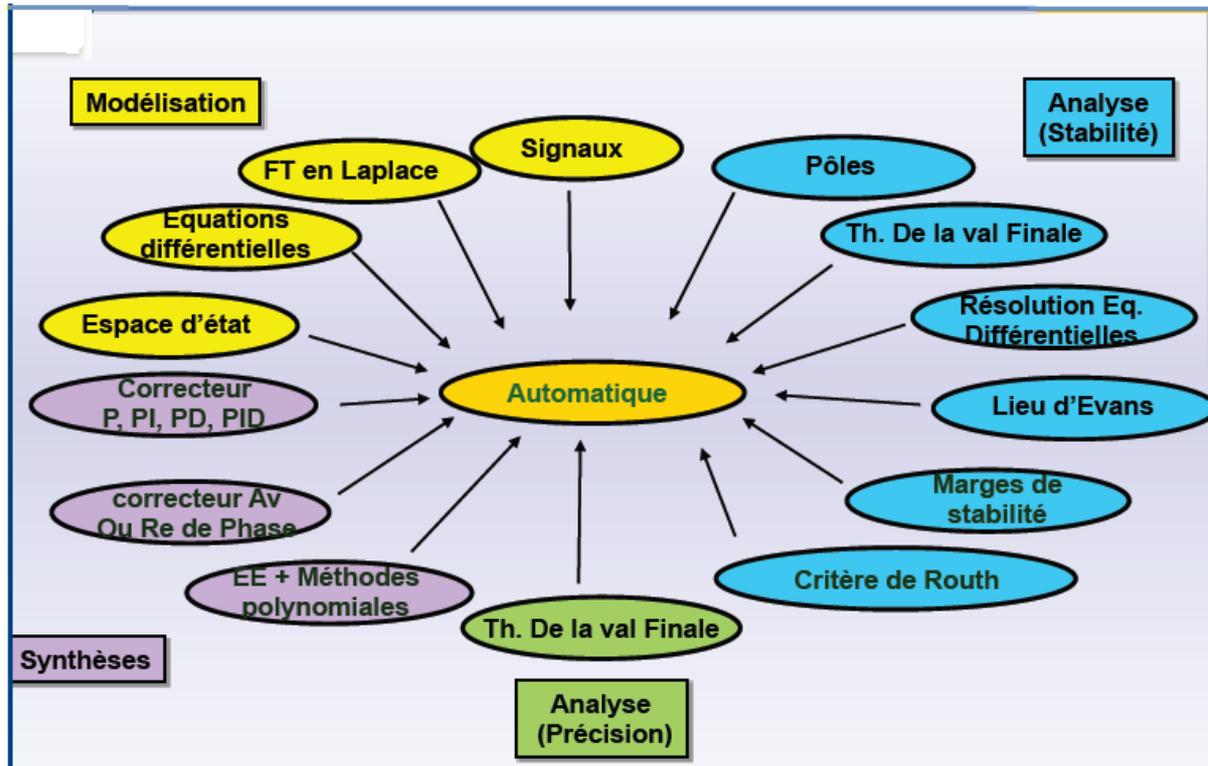
Contrôle Analogique

Cours destiné aux étudiants de troisième année licence de Génie Industriel



Elaboré par : Dr M.LAZREG

Contrôle Analogique



SOMMAIRE

CHAPITRE I

I Introduction et principes généraux de l'asservissement

I-1 Introduction :

I-1-1 : Qu'est-ce qu'un asservissement

I-1-2 : Définition d'un système

I-1-3 : Qu'est-ce qu'un système automatisé

I-1-4 : Qu'est-ce que l'automatique

I-2. Asservissement, boucle fermée :

CHAPITRE II

II Les systèmes linéaires asservis

II-1. Notion de systèmes

II-1-1 Définitions

II-2. Boucle ouverte et boucle fermée

II-2-1. Commande en boucle ouverte

II-2-2. Commande en boucle fermée :

II-3. Notion de signal :

II-3-1. Impulsion de Dirac :

II-3-2 Echelon de position :

II-3-3. Echelon de vitesse ou rampe :

II-4. La transformée de LAPLACE

II-4-1 Définition

II-4-2. Principales propriétés

II-5. Notion de fonction de transfert

II-5-1. Définition :

II-6. Schémas bloc, Simplification et réduction, Calcul de fonctions de transfert

II-6-1. Définition

CHAPITRE III

III- Etude temporelle des systèmes asservis

III-1 Systèmes du premier ordre

III-1-1 Définition

III-1-2. Comportement temporel des systèmes du premier ordre

III-1-2-1. Réponse à une impulsion

III1-2-2. Réponse à un échelon

III1-2-3. Réponse à une rampe

III-2. Systèmes du second ordre

III-2-1 Définition :

III-2-2 Etude temporelle des systèmes de second ordre

III-2-2-1. La réponse Impulsionnelle

III-2-2-2. La réponse indicielle

CHAPITRE IV

IV-Performances des systèmes asservis linéaires dans le domaine temporel

IV-1. Analyse temporelle

IV-1-1. La Stabilité

IV-1-2. Critère de Routh-Hurwitz

IV-1-3. Précision statique et précision dynamique

IV-1-4. Classes des systèmes

CHAPITRE V

V- Etude fréquentielle des systèmes asservis

V-1 Comportement fréquentiel des systèmes du premier ordre

V-1-1. Etude harmonique et réponse fréquentielle d'un système du premier ordre

V-1-1-1. Lieux de bode

V-1-1-2. Le lieu de Nyquist

V-1-1-3. Réponse fréquentielle de Black Nichols

V-2 Comportement fréquentiel des systèmes du second ordre

V-2-1. Etude harmonique et réponse fréquentielle d'un système du second ordre

V-2-1-1. Lieux de bode

V-2-1-2. Le lieu de Nyquist

V-2-1-3. Réponse fréquentielle de Black Nichols

V-2-2. Réponses fréquentielles pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement ξ

V-2-2-1. Lieux de Bode

V-2-2-2. Le lieu de Nyquist

V-2-2-3. Réponse fréquentielle de Black Nichols

CHAPITRE VI

VI- Performances des systèmes asservis dans le domaine fréquentiel

VI-1. Analyse fréquentielle

VI-2. Les Marges de stabilité

VI-2-1. Marge de gain

VI-2-2. Marge de phase

VI-3. Critère de stabilité

VI-3-1. Le critère de bode

VI-3-2. Critère de Nyquist

VI-3-3. Critère de *Black* :

CHAPITRE VII

VII. La correction des systèmes analogiques asservis

VII-1. La problématique de la correction des systèmes asservis

VII-2. Les méthodes de corrections

VII-3. Les correcteurs usuels

VII-3-1. Le correcteur proportionnel P

VII-3-2. Le correcteur proportionnel intégral

VII-3-3. Le correcteur proportionnel dérivé PD

VII-3-4. Le correcteur proportionnel Intégral dérivé PID:

VII-4 Les correcteurs spécifiques adaptés

VII-4-1 : Les correcteurs à retard de phase

VII-4-2 Le correcteur à avance de phase

VII-5. Stratégie de synthèse des correcteurs

Introduction :

L'automatique ou contrôle des systèmes est la discipline qui, d'une manière générale, traite de la commande des systèmes. Dans le domaine industriel son application est importante par l'apport à la fois des solutions, des méthodes d'étude et des démarches systématiques d'analyse.

Ce document couvre la partie enseignée aux étudiants de licence de génie industriel dans notre organisme. Le lecteur trouvera l'aspect du contrôle des systèmes linéaires. La présentation de cet ouvrage respecte l'ordre chronologique dans lequel la discipline est en général par chapitre.

Le premier chapitre est consacré aux méthodes et principes de base de l'asservissement partie essentielle et importante pour entamer ce document. L'asservissement proprement dit, est l'étude des systèmes bouclés. Ce chapitre contient aussi l'ensemble des notions essentielles à l'étude générale du contrôle ou automatique des systèmes, concepts qui restent valables dans toute la suite de l'étude.

Le deuxième chapitre aborde la notion de systèmes asservis, avec toutes les notions essentielles à savoir les régimes des comportements (régime établi ou permanent, régime transitoire, régime statique) ; les systèmes à temps invariant.

-Il est aussi question de l'étude des trois signaux analogiques les plus utilisés (Impulsion, échelon, rampe)

-La notion de boucle ouverte et de boucle fermée, est importante dans l'élaboration de la commande.

-La modélisation mathématique, des systèmes s'effectue par des équations différentielles. Ces équations sont transformées en polynômes à l'aide des transformées de LAPLACE, notion importante abordée dans ce chapitre.

-L'équation de transfert, résultat de la relation des transformées de LAPLACE de la notion entrée/sortie des systèmes sollicités par des signaux comme entrée et auxquels ils répondent par des signaux comme sortie.

- Pour mieux Cerner l'étude des systèmes dans les chapitres suivants nous terminons celui-ci par leur schématisation sous forme de blocs, leur simplification et leur réduction (dans le cas où plusieurs systèmes fonctionnent ensemble) par le calcul de la fonction de transfert résultante.

Le troisième chapitre traite de l'étude temporelle des systèmes, à savoir leur comportement en fonction du temps aux trois signaux analogiques cités au deuxième chapitre. Les systèmes

abordés dans ce chapitre sont du premier et du second ordre. Les réponses aux signaux sont respectivement, étudiées et illustrés par leur tracé en fonction du temps (réponse impulsionnelle, réponse indicielle et réponse à une rampe).

Dans le quatrième chapitre, les performances des systèmes temporels sont abordées par l'étude des conditions de stabilité par l'évocation si nécessaire du critère de Routh et de précisions, selon leur classe..

Le cinquième chapitre, est consacré au chapitre important de l'étude fréquentielle des systèmes. Toutes les notions (de modélisations, de fonction de transfert et de tracé des lieux de Bode de Nyquist et de Black) sont traitées et bien expliquées pour permettre à l'étudiant d'acquérir la maîtrise de ces méthodes de résolution.

Le sixième chapitre concerne les performances des systèmes dans le domaine fréquentiel.

La stabilité de ces systèmes se mesure aux marges de gain et de phase. Les critères de stabilité sur les tracés des lieux (Bode, Nyquist et Black) sont illustrés par les valeurs de ces marges.

Le septième chapitre et dernier est très important du fait qu'il représente le cœur du contrôle des systèmes. Pour cause ce chapitre s'intéresse essentiellement à corriger les systèmes asservis en tentant d'effacer le plus possible l'écart entre l'entrée (qui est désirée) et la sortie (la réponse du système).

Chaque chapitre est suivi de sa série de travaux dirigés.

CHAPITRE I

Introduction et principes généraux de l'asservissement

I-1.Introduction :

I-1-1 : Qu'est-ce qu'un asservissement ?

D'après le dictionnaire le Larousse un asservissement est un état de dépendance, de servitude (Action de mettre un mécanisme sous la dépendance d'un asservisseur).

L'asservissement d'un système automatique, est le processus de réduire ou au mieux d'annuler l'écart entre la grandeur commandée (le résultat obtenu) et la grandeur de commande (résultat souhaité). L'asservissement fonctionne en poursuite (système suiveur). L'objectif est alors que la réponse du système suive la consigne

I-1-2 : Définition d'un système

Un système est un assemblage de composants ou éléments qui communiquent entre eux par des lois de la physique et des mathématiques de manière à produire une fonction ou une tâche donnée. Il possède une ou plusieurs entrées définissant les grandeurs des résultats souhaités, et des sorties représentant les résultats calculés.

I-1-3 : Qu'est-ce qu'un système automatisé ?

Un système automatisé est un système qui réalise, de manière **autonome**, des opérations du processus de la transformation souhaitée. L'intervention de l'homme est alors limitée à la **programmation**, la mise en marche et aux **réglages** de certains **paramètres**.

Notre cas se limite aux systèmes continus à temps invariants LTI où les grandeurs d'entrée et de sortie évoluent de manière continue en fonction du temps. Exemple un moteur, un four, scie électrique automatisée...

I-1-4 : Qu'est-ce que l'automatique ?

L'automatique est l'ensemble des disciplines scientifiques et des techniques utilisées pour la conception de la commande et du contrôle du système. La méthodologie utilisée pour concevoir un système de commande peut s'opérer de la manière suivante.

-Cahier des charges : L'automaticien doit prendre connaissance du problème et des diverses spécifications.

- Modélisation : L'automaticien doit décrire le comportement du système étudié, de manière à formuler une relation entrée/sortie par un modèle de fonction appelée fonction de transfert.

- Analyse : S'opère par L'utilisation des techniques pour juger des performances du système (stabilité, temps de réponse, oscillations, précision ...) à dire une partir du modèle,

- **Synthèse** : Si c'est nécessaire concevoir un correcteur qui confère au système étudié les performances souhaitées.

Les systèmes asservis, sont des **SYSTEMES BOUCLES**

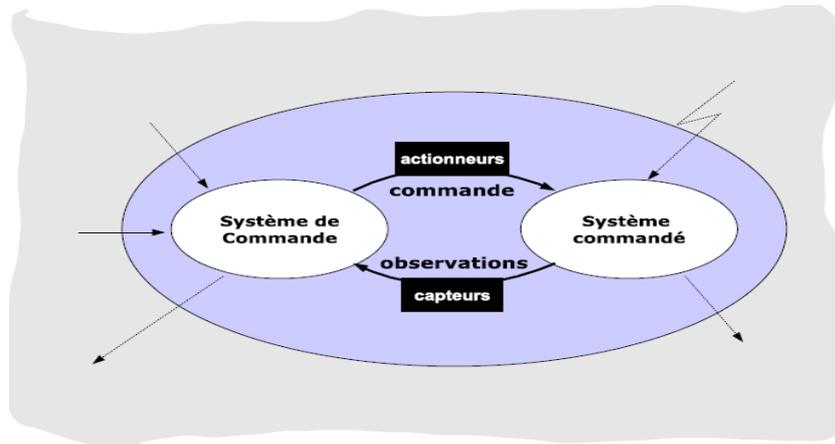
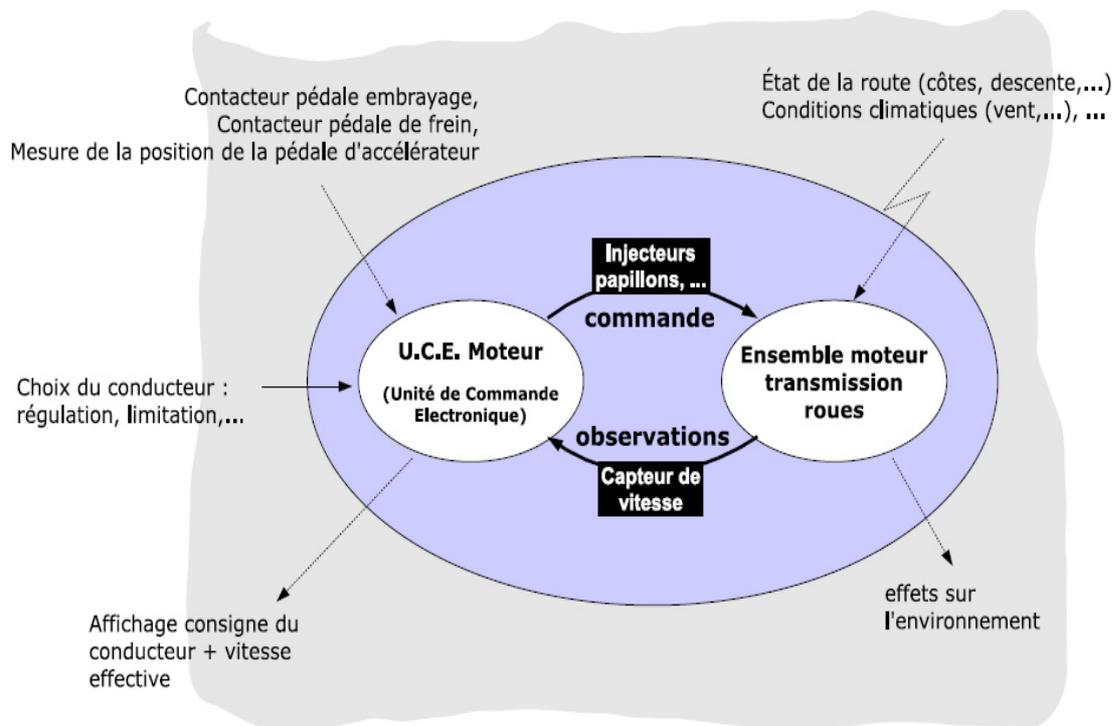


Figure.I.1 Schéma D'un système bouclé

Exemple : La commande automatique de la vitesse d'une voiture



- La commande est considérée comme une **sortie** par le système de commande (Unité de Commande Electronique UEC) et comme une **entrée** du système commandé (la vitesse de la voiture)

-Les mesures capteur de vitesse sont considérées comme une entrée du système de commande et comme une sortie du système commandé.

Remarque : L'automatique intervient aujourd'hui dans tous les domaines de notre quotidien.

I-2.Asservissement, boucle fermée :

1: Définition : Asservir un système, c'est fabriquer une partie de la commande du procédé (déroulement du processus) en utilisant l'information de sortie mesurée par un capteur

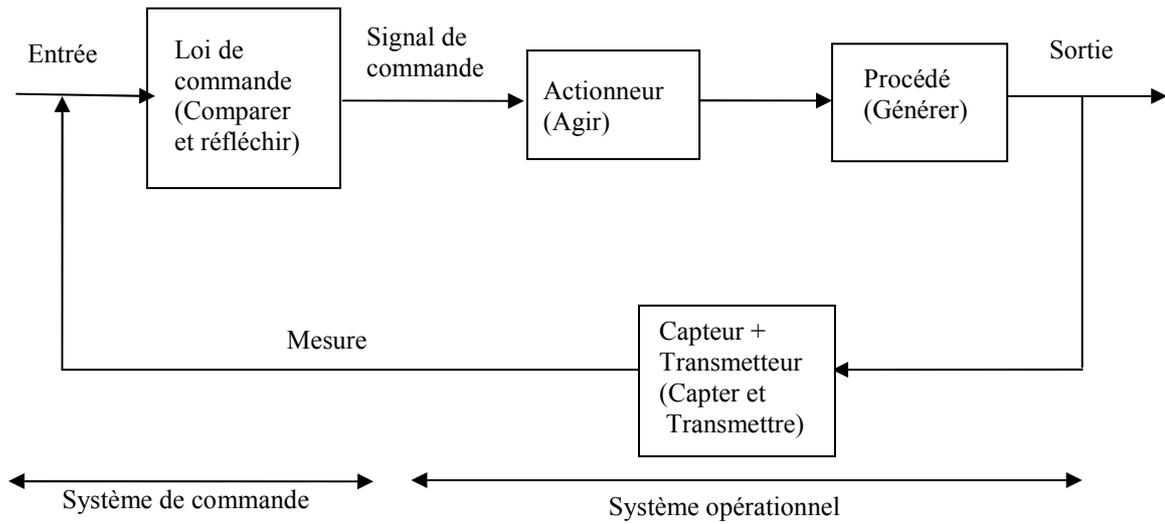


Figure.I.2 Principe d'un asservissement.

La partie commande se construit autour du comparateur dont le rôle est de donner la différence (écart) entre le signal consigne qui est **le signal que l'on veut obtenir**, et le signal mesuré qui est **le signal obtenu** à la sortie

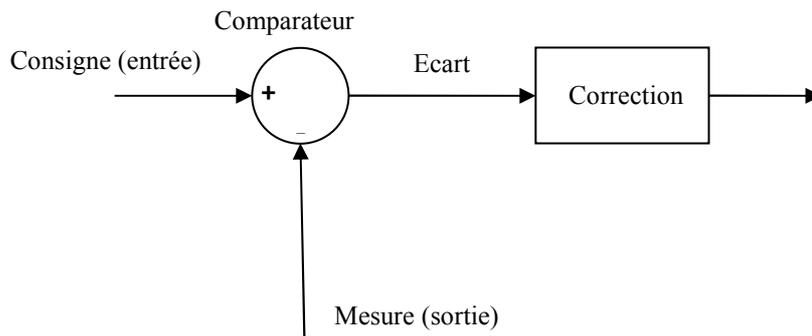


Figure.I.3 Partie commande

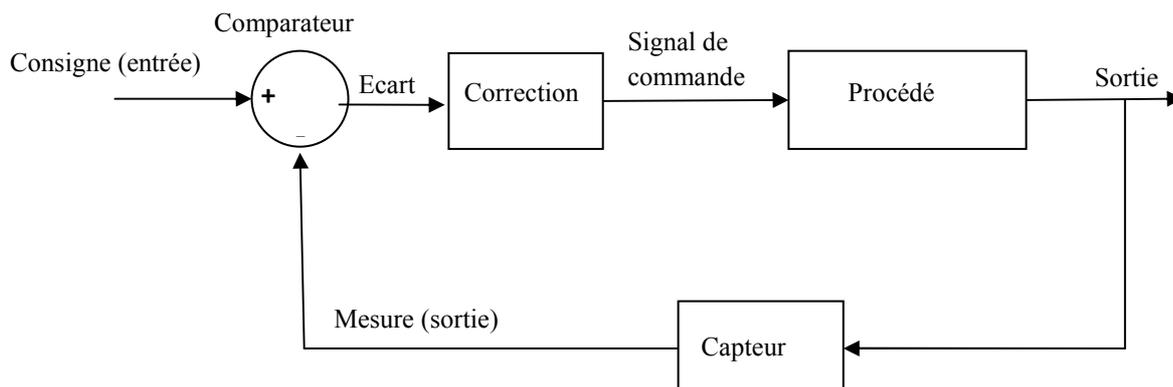
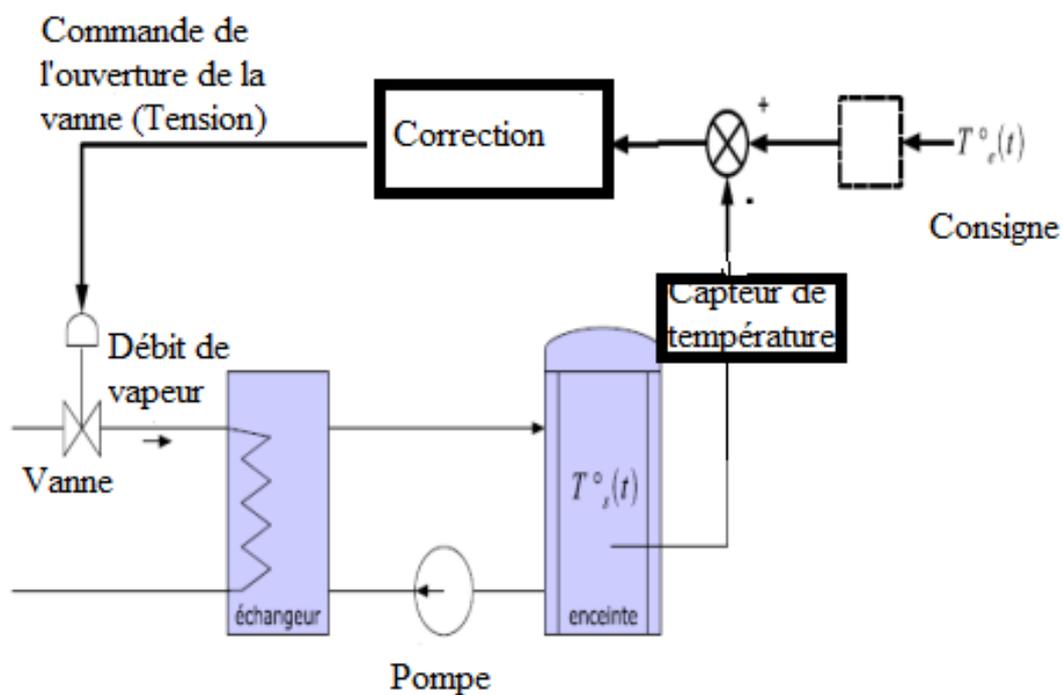


Figure I.4. Schéma d'un asservissement

Exemple : L'asservissement de la température d'une enceinte



CHAPITRE II

Les systèmes linéaires asservis

II-1. Notion de systèmes :

II-1 Définitions

Un système est un ensemble d'éléments communicant entre eux par des lois de la physique pour exercer collectivement une fonction bien déterminée.

Un système communique avec l'extérieur par l'intermédiaire de fonctions de temps, appelés signaux.

On distingue deux régimes dans le comportement des systèmes :

- Le **régime permanent** ou **établi**, caractérisant la réponse stabilisée du système à une entrée quelconque,
- le **régime transitoire**, caractérisant l'évolution de la réponse avant que le régime permanent ne soit atteint.
- Le **régime statique** est le régime permanent dans le cas où l'entrée est constante.- Un système est **causal** si sa sortie $s(t)$ à un instant t_0 ne dépend que des valeurs de son entrée $e(t)$ pour $t \leq t_0$

Un système causal ne répond pas avant d'être excité (système non anticipatif). Les systèmes physiques temporels réalisables sont de nature **causale**.

- Un système à **temps invariant** a un modèle identique à tout instant (un retard τ ne change pas la loi du modèle).

- Schéma d'un système :

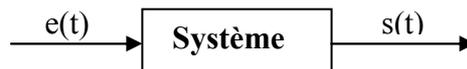
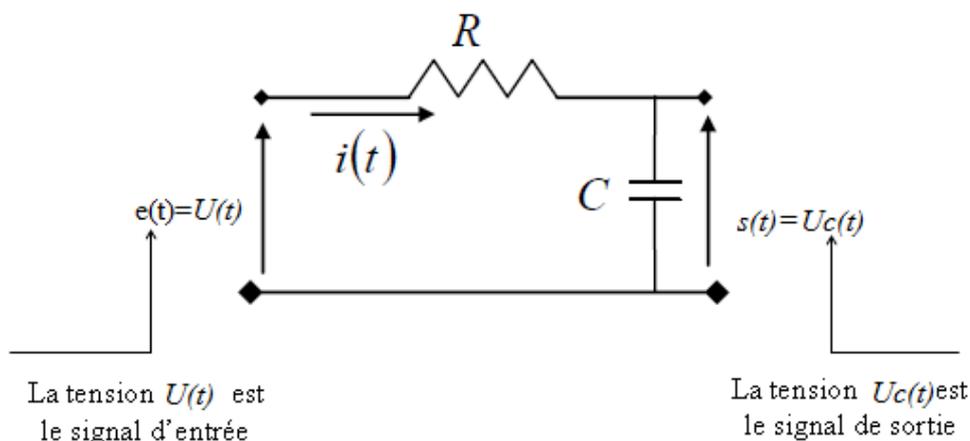


Figure.1. Schéma bloc d'un système

Exemple : Soit le système électrique suivant



FigureII-2. Circuit électrique RC

II-2. Boucle ouverte et boucle fermée

II-2-1. Commande en boucle ouverte : Dans ce cas la commande est envoyée en entrée sans contrôle sur les sorties

Exemple :

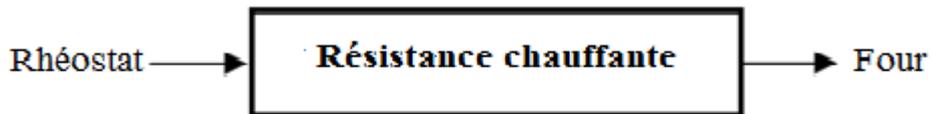


Figure II-3. Schéma d'une boucle ouverte

II-2-2. Commande en boucle fermée : Pour améliorer les performances d'une commande, il est indispensable d'observer les sorties du système pour les comparer aux entrées qui représentent les résultats désirés.

- La notion de système asservi exige que les sorties du système soient contrôlées.

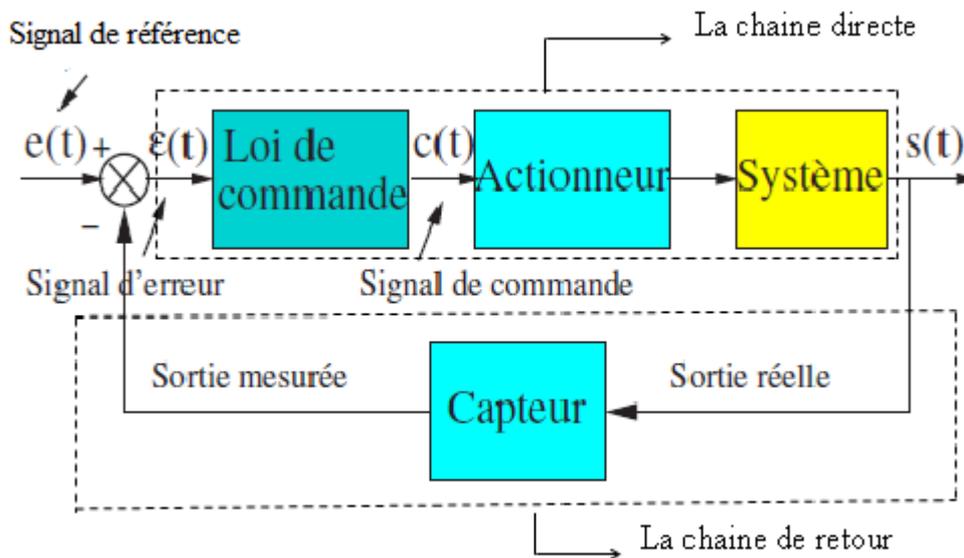


Figure II-4. Système commandé en boucle fermée

Exemple : Une boucle fermée qui représente le processus de chauffage d'une pièce

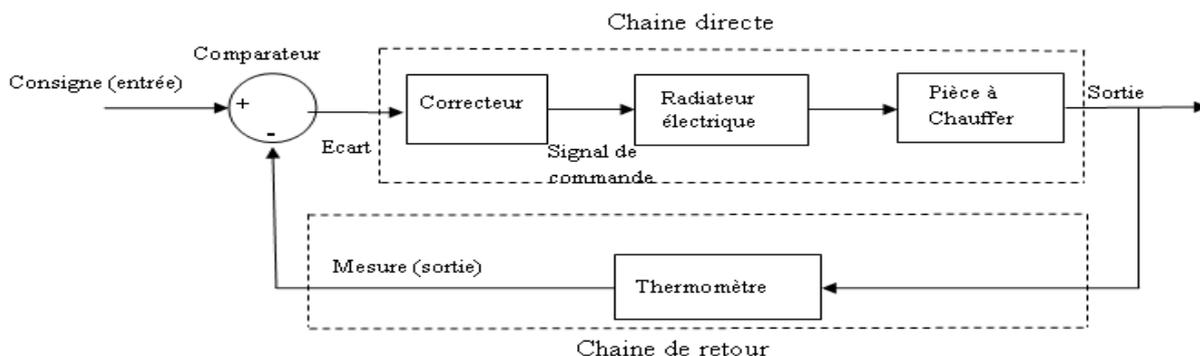


Figure II-5. Schéma d'un asservissement

II-3. Notion de signal

II-3. Notion de signal :

Un signal dans un système de commande automatique représente une grandeur physique qui peut être une température, une force, une pression, une vitesse, une tension, un débit, etc. et qui évolue au cours du temps, c'est ce qu'on appelle **signal temporel**

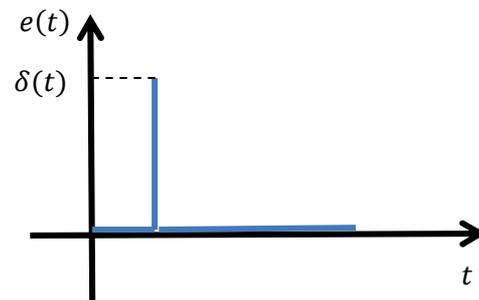
Selon la nature de la commande, le signal est soit analogique ou numérique.

Dans notre cas, nous étudions les signaux analogiques relatifs à la commande linéaire continue des processus. Pour notre étude nous utiliserons les trois signaux suivants

II-3-1. Impulsion de Dirac :

Définition :
$$\begin{cases} \delta(t) = 0 \text{ pour } t \neq 0 \\ \delta(t) \neq 0 \text{ pour } t = 0 \end{cases}$$

L'amplitude théoriquement infinie de l'impulsion est représentée par un pic surmonté d'une flèche d'amplitude 1

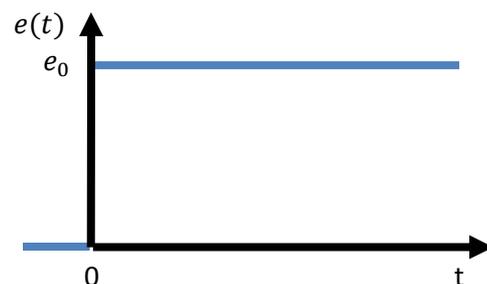


II-3-2 Echelon de position :

Définition :
$$\begin{cases} e(t) = e_0 \text{ pour } t \geq 0 \\ e(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \end{cases}$$

Dans le cas où $e_0 = 1$ l'échelon est dit unitaire

Et est noté $u(t)$

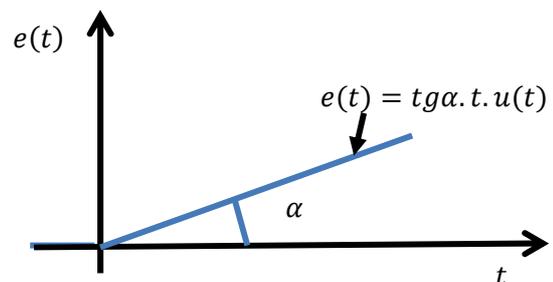


II-3-3. Echelon de vitesse ou rampe :

Définition :
$$e(t) = tg\alpha \cdot t \cdot u(t)$$

si $tg\alpha = 1$ alors $e(t) = t \cdot u(t)$

Dans ce cas l'échelon de vitesse est unitaire.



II-4. La transformée de LAPLACE :

Les systèmes dynamiques sont modélisés mathématiquement par des équations différentielles, dont la résolution étant complexe oblige l'utilisation de la transformée de Laplace.

L'intérêt principal de cette transformée est de remplacer l'équation différentielle dans le domaine temporel par une équation polynômiale dans le domaine symbolique. La recherche des solutions de ces équations différentielles se limite alors, à déterminer les racines du polynôme.

II-4-1 Définition : soit une fonction $f(t)$ sa transformée de LAPLACE est donnée par la formule suivante :

$$L[f(t)] = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (\text{II.1})$$

Où p est une variable complexe

Exemple : Calcul de la transformée de LAPLACE de la fonction $f(t) = e^{-at}$

$$L[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+p)t} dt = \frac{1}{a+p}$$

II-4-2. Principales propriétés

a- La linéarité

La transformée de la place d'une somme :

$$L[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p) \quad (\text{II.2})$$

b- La transformée de la place de la dérivée première d'une fonction :

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0) \quad (\text{II.3})$$

c- La transformée de la place de la dérivée d'ordre n d'une fonction :

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^n f(p) - p^{n-1} f'(0) - p^{n-2} f''(0) - \dots - p^{(n-1)} f(0) \quad (\text{II.4})$$

d-Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p F(p)$$

e-Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p F(p)$$

Remarque : ceci est valable pour les signaux stables.

f- Théorème du retard :

$$L[f(t - T)] = e^{-pT} F(p) \quad \text{Pour } T \geq 0 \quad (\text{II.5})$$

II-5. Notion de fonction de transfert :

Un système linéaire d'entrée et de sortie est régi par une équation différentielle à coefficients constants du type :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 \quad (\text{II.6})$$

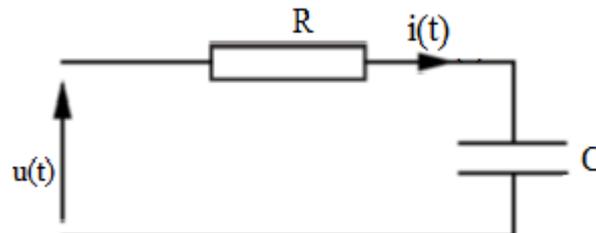
La transformée de LAPLACE avec les conditions initiales nulles

$$a_n p^n S(p) + a_{n-1} p^{n-1} S(p) + \dots + a_0 = b_m p^m R(p) + b_{m-1} p^{m-1} E(p) + \dots + b_0 \quad (\text{II.7})$$

II-5-1.Définition : La fonction de transfert d'un système continu est le rapport de la transformée de Laplace de sa sortie sur la transformée de Laplace de son entrée en considérant les conditions initiales nulles :

$$F(p) = \frac{S(p) \rightarrow \text{Sortie}}{E(p) \rightarrow \text{Entrée}} \quad (\text{II.8})$$

-Exemple : Modélisation et fonction de transfert du système électrique RC suivant, Sachant que l'entrée est la tension appliquée, et la sortie l'intensité du courant électrique générée :



1- la modélisation mathématique par les équations différentielles :

$$u(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int idt$$

La dérivée donne :

$$\frac{du(t)}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t)$$

2- La transformée de la LAPLACE

$$pU(p) = RpI(p) + \frac{1}{C} I(p)$$

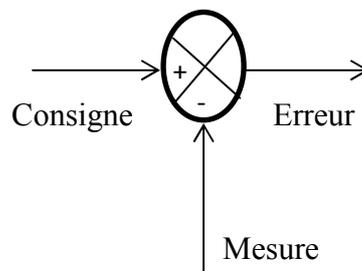
En considérant les conditions initiales nulles nous obtenons la fonction de transfert suivante :

$$F(p) = \frac{I(p)}{U(p)} = \frac{Cp}{1+RCp}$$

II-6. Schémas bloc, Simplification et réduction, Calcul de fonctions de transfert :

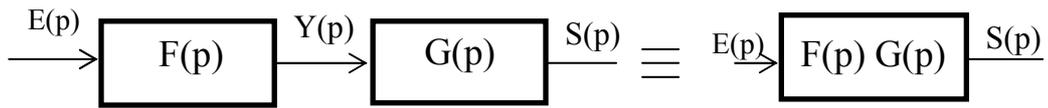
II-6-1.Définition : Ces schémas illustrent la régulation des procédés sous forme de blocs (ou schémas fonctionnels) qui représentent les fonctions des différents éléments de la boucle de régulation. Ils sont reliés entre eux par des flèches annotées définissant les signaux qui y circulent.

➤ Le comparateur :



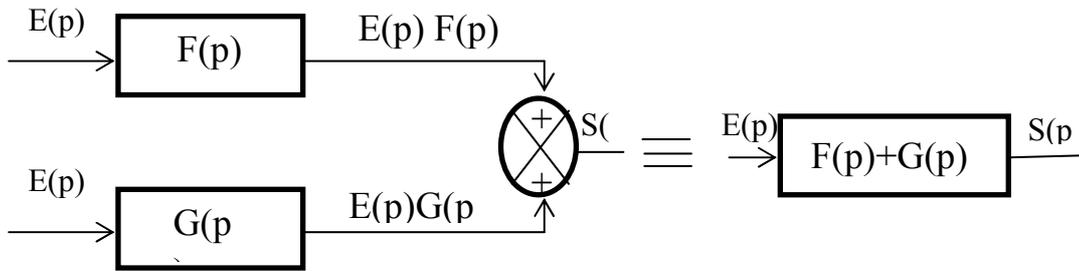
Le signal d'erreur = La consigne – La mesure

➤ Blocs en série :



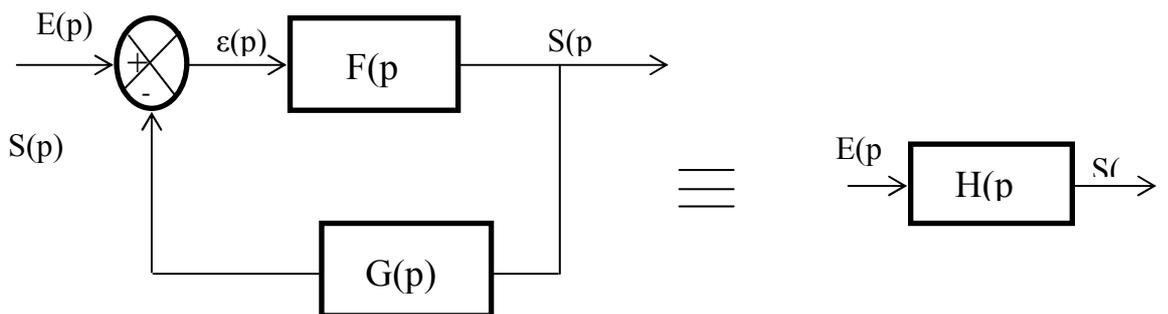
$$\begin{cases} Y(p) = E(p)F(p) \\ S(p) = Y(p)G(p) \end{cases} \text{ donc } \frac{S(p)}{E(p)} = F(p) \cdot G(p)$$

➤ Blocs en parallèle :



$$S(p) = E(p)F(p) + E(p)G(p) \text{ donc } \frac{S(p)}{E(p)} = F(p) + G(p)$$

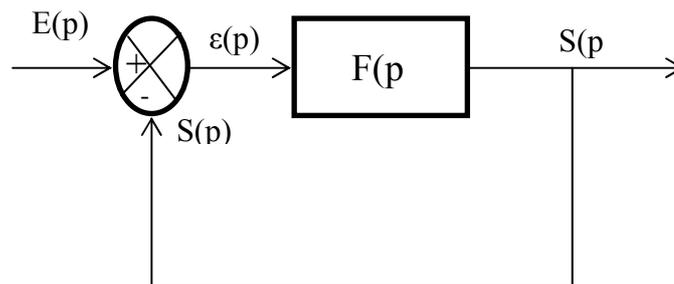
➤ Fonction de transfert de la boucle fermée :



$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p)G(p) \quad S(p) = F(p) \cdot \varepsilon(p) = F(p)[E(p) - S(p)G(p)]$$

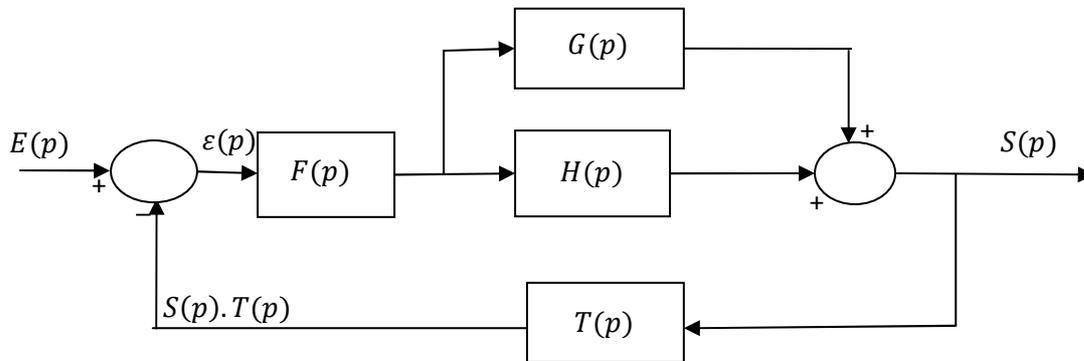
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{F(p)}{1 + F(p) \cdot G(p)} \quad (\text{II.9})$$

le cas où la chaîne de retour ne comporte pas de système on dit que le retour est unitaire $G(p) = 1$



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{F(p)}{1+F(p)} \quad (\text{II.10})$$

Application : Calcul de la fonction de transfert du schéma bloc suivant



Solution

$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p)T(p) ; \quad S(p) = [F(p)G(p) + F(p)H(p)]\varepsilon(p)$$

$$S(p) = [F(p)G(p) + F(p)H(p)][E(p) - S(p)T(p)]$$

$$FTBF = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{F(p)G(p) + F(p)H(p)}{F(p)G(p) + F(p)H(p) + T(p)}$$

Fiche de TD N°1 Modélisation des systèmes

Exercice N°1 : Soit le système suivant :

Une masse M , retenue à un mur par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux f et un ressort d'amortissement k que l'on tire par une tension T vers le bas.

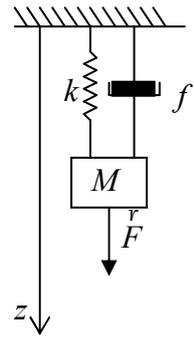
Entrée : Force appliquée à la masse.

Sortie : Position de la masse.

-Ecrire les équations différentielles décrivant le système.

-Ecrire la transformée de Laplace de l'équation différentielle reliant l'entrée à la sortie.

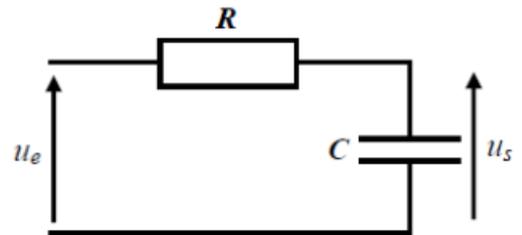
- Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte



Exercice N°2 :

Soit un circuit électrique représenté par le schéma

- 1- Ecrire les équations différentielles le décrivant
- 2- Donner la fonction de transfert en boucle ouverte
- 3- Tracer la réponse indicielle, la réponse impulsionnelle



Exercice N°3 : Soit un volant de moment d'inertie $J= 25\text{Km}^2$ lancé par un couple moteur $C_m=12\text{Nm}$ le coefficient de frottements visqueux dans le guidage est $f=0.6\text{Nm/tr}$

Calculer :

-1- Les équations différentielles qui modélisent le système.

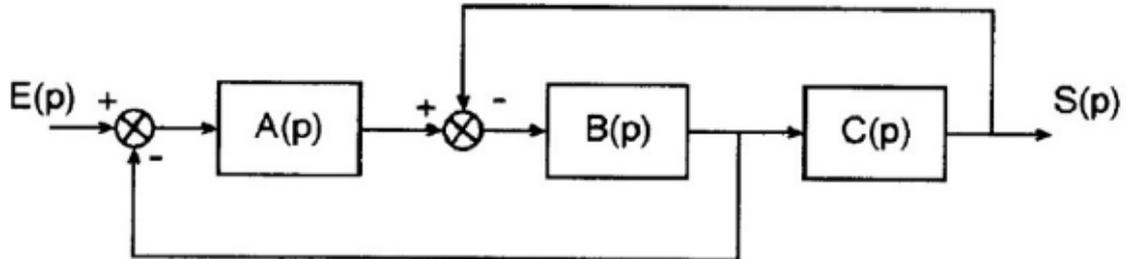
-2-La fonction de transfert en boucle ouverte, exprimer la constante de temps et le gain statique.

-3-La fonction de transfert en boucle fermée si le système est asservi dans une boucle avec un retour unitaire.

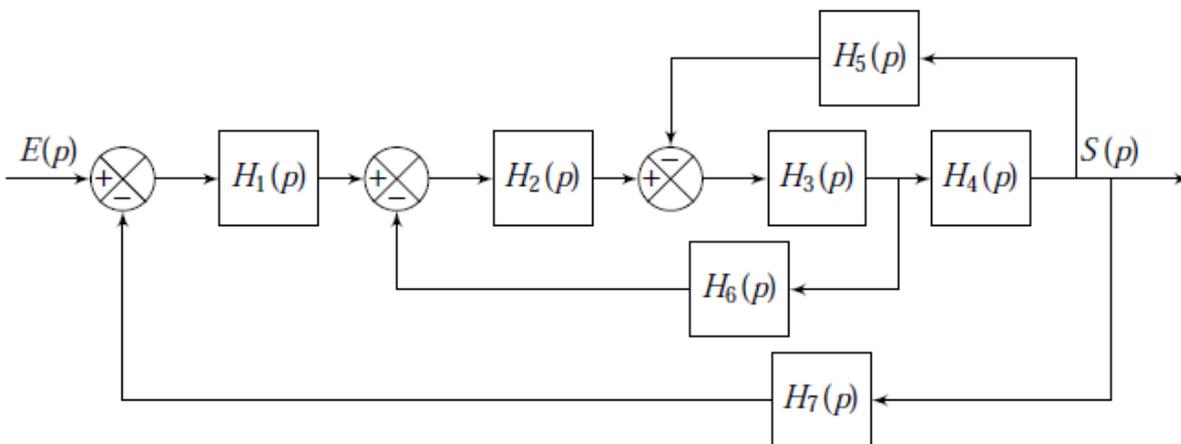
Fiche de TD N°2 Simplification des schémas bloc

Des systèmes représentés par leur fonction de transfert forment les schémas bloc suivants :

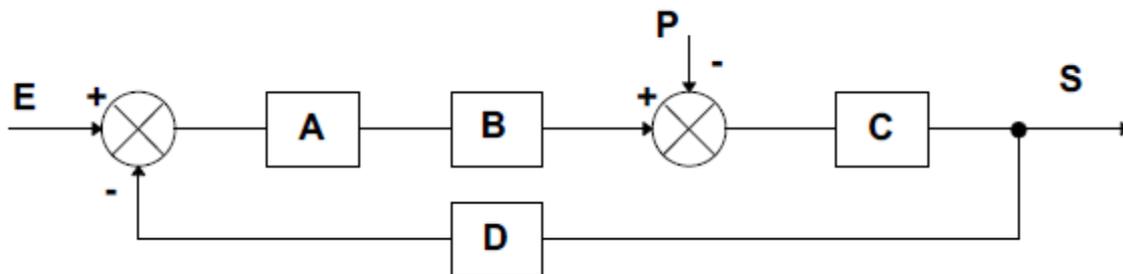
B-I



B-II



B-III



Donner les fonctions de transfert $G(p)$, $F(p)$ et $T(p)$ respectivement des trois schémas blocs et montrer que la fonction de transfert $T(p)$ se met sous la forme suivante :

$$T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} + \frac{S(p)}{P(p)}$$

CHAPITRE III

Etude temporelle des systèmes asservis

III-1 Systèmes du premier ordre

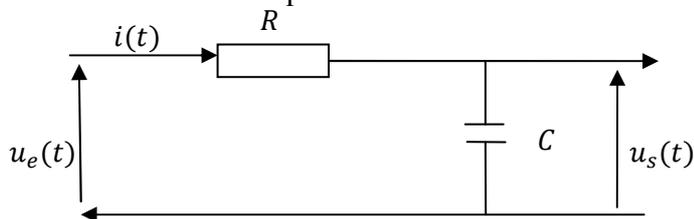
III-1-1 Définition : Un système est dit du **premier ordre** si sa fonction de transfert peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\tau p} \quad (\text{III.1})$$

- K est le gain statique sans unité quand $S(p)$ et $E(p)$ sont de même signe

- τ La constante de temps

Exemple : Soit le circuit électrique suivant :



1- la modélisation mathématique par des équations différentielles

$$u_e(t) = u_R(t) + u_c(t)$$

-Entrée $u_e(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int idt$

Considérons la tension aux bornes de la capacité $u_c(t)$ comme sortie

-Sortie $u_s(t) = u_c(t) = \frac{1}{C} \int idt$

$$i = C \frac{du_s(t)}{dt} \quad \text{Donc } u_e(t) = RC \frac{du_s(t)}{dt} + u_s(t)$$

2-La transformée de LAPLACE :

$$U_e(p) = RCpU_s(p) + U_s(p)$$

3- L'équation de transfert :

$$H(p) = \frac{U_s(p)}{U_e(p)} = \frac{1}{1+RCp}$$

Le gain statique $K = 1$ et la constante de temps $\tau = RC$

III-1-2. Comportement temporel des systèmes du premier ordre:

III-1-2-1. Réponse à une impulsion

L'entrée $e(t) = a\delta(t)$ avec $a = cte$ avec sa transformée de LAPLACE : $E(p) = a$.

$$S(p) = \frac{K}{1+\tau p} a$$

-La réponse temporelle $s(t)$ qui est la transformée inverse de LAPLACE

$$S(p) = \frac{aK}{\tau(1+p)}$$

Sur le tableau ci-dessus cette équation est de la forme $\frac{1}{(p+a)}$ donc la transformée inverse :

$$s(t) = \frac{aK}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t) \quad (\text{III.2})$$

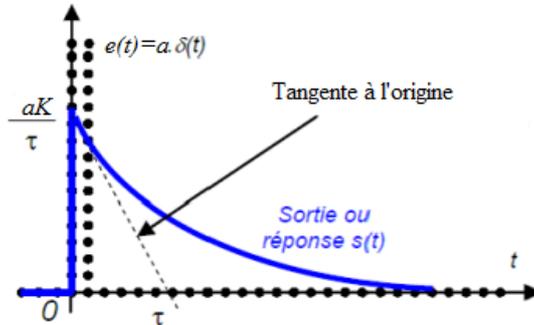


Figure III-1. Réponse à une impulsion

III-1- 2-2. Réponse à un échelon :

L'entrée $e(t) = bu(t)$ si $b=1$ l'échelon est dit unitaire

-La transformée de LAPLACE :

$$E(p) = \frac{b}{p}$$

$$S(p) = \frac{Kb}{p(1+\tau p)}$$

-La réponse temporelle $s(t)$ qui est la transformée inverse de LAPLACE

-En décomposant de la façon suivante :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{1+\tau p}$$

-En calculant on trouve : $A = +Kb$ et $B = -Kb$ donc

$$S(p) = \frac{Kb}{p} - \frac{Kb}{1+\tau p}$$

-En vous aidant du tableau des transformées de LAPLACE vous obtenez :

$$s(t) = Kb \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t) \quad (\text{III.3})$$

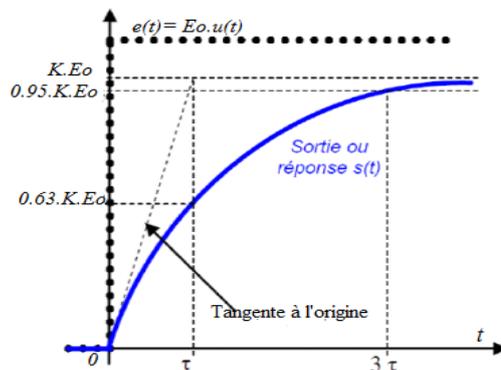


Figure III-2. Réponse à un échelon

- Le gain statique représente le comportement à l'infini $s(\infty) = Kb$
- La constante de temps caractérise le comportement en régime transitoire $s(\tau) = 0.63. s(\infty)$
- Le temps de réponse représente la fin du régime transitoire $tr_{5\%} \approx 3\tau$

III-1-2-3. Réponse à une rampe :

L'entrée $e(t) = ct u(t)$ avec $c = cte$

-La transformée de LAPLACE

$$E(p) = \frac{c}{p^2}$$

$$S(p) = \frac{Kc}{p^2(1+\tau p)}$$

-La réponse temporelle

En vous aidant du tableau des transformées de Laplace vous obtenez :

$$s(t) = cK \left(\tau e^{-\frac{t}{\tau}} + t - \tau \right) u(t) \quad (\text{III.4})$$

Représentation graphique pour $K < 1$

- Pour $K < 1$ l'erreur entre l'entrée et la sortie augmente.
- Pour $K = 1$, le système ne rejoint jamais la consigne, cependant sa variation est parallèle à l'entrée retardée d'une fois la constante de temps.
- Pour $K > 1$, l'erreur entre l'entrée et la sortie diminue, s'annule, puis augmente.

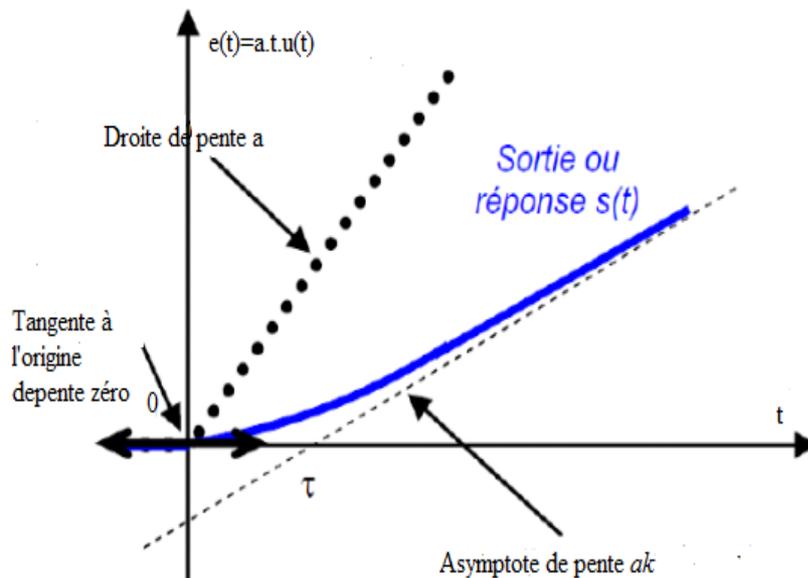


Figure III-3. Réponse à une rampe

III-2. Système du second ordre

III-2-1 Définition :

Un système physique d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ est du deuxième ordre, s'il est régi par une équation différentielle du second ordre à coefficients constants :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t) \quad (\text{III.8})$$

- K est le gain du système
- ω_0 La pulsation propre du système non amortie
- ξ Le coefficient d'amortissement

- Avec les conditions initiales nulles, la transformée de Laplace est :

$$\frac{1}{\omega_0^2} p^2 S(p) + \frac{2\xi}{\omega_0} p S(p) + S(p) = KE(p)$$

La fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} p + 1} \quad (\text{III.9})$$

III-2-2. Etude temporelle des systèmes de second ordre :

III-2-2-1. La réponse Impulsionnelle :

- La réponse impulsionnelle résulte quand le système est soumis à une entrée Impulsion $e(t) = \delta(t)$, sa transformée de Laplace : $E(p) = 1$

$$S(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} p + 1}$$

- La réponse dans le domaine de la place dépend de la nature des racines p appelés pôles du système.

$$\text{- Calcul du discriminant : } \Delta = \frac{(2\xi)^2}{\omega_0^2} - \frac{4}{\omega_0^2} = \frac{4(\xi^2 - 1)}{\omega_0^2}$$

- **Cas 1** : $\xi > 1 \Rightarrow \Delta > 0$ Le système possède 2 racines réelles négatives:

$$p_{1,2} = \omega_0 \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

donc le dénominateur de la fonction de transfert est décomposable et donne deux fonctions de transfert du premier ordre :

$$S(p) = \frac{A}{(p-p_1)} + \frac{B}{(p-p_2)} = \frac{K}{(p-p_1)(p-p_2)}$$

$$A = -B = \frac{K}{2\omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}}$$

La réponse impulsionnelle est la transformée inverse de Laplace $s(t) = L^{-1}[S(p)]$

$$s(t) = \frac{K}{2\omega_0\sqrt{(\xi^2-1)}} (e^{p_1t} - e^{p_2t}) \quad (\text{III.10})$$

-Le système s'amortit voir Figure III-7.

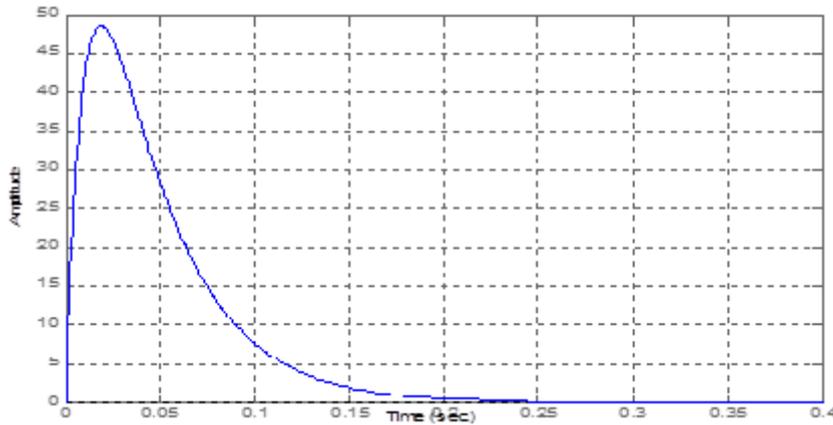


Figure III-4. Réponse Impulsionnelle pour $\xi > 1$

-Cas 2 : $\xi = 1 \Rightarrow \Delta = 0$ Le système possède une racine double

$$S(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2}{\omega_0}p + 1} = \frac{K}{\left(\frac{p}{\omega_0} + 1\right)^2} \quad p_{1,2} = -\omega_0,$$

$$s(t) = L^{-1}[S(p)] = K\omega_0^2 t e^{-\omega_0 t}$$

-Le système est en amortissement critique.

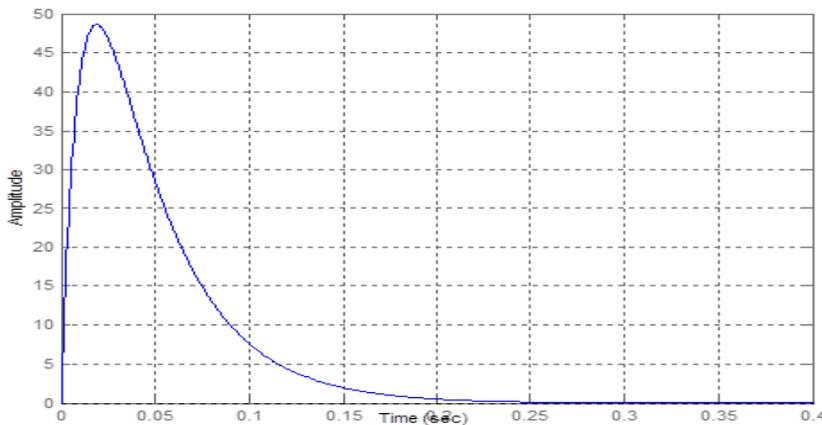


Figure III-5. Réponse Impulsionnelle pour : $\xi = 1$

-Cas 3 : $\xi < 1 \Rightarrow \Delta < 0$ Le système possède des racines complexes

$$p_{1,2} = \omega_0 \left(-\xi \pm j\sqrt{(\xi^2 - 1)} \right)$$

$$p_{1,2} = \omega_0 \left(-\xi \pm \sqrt{(1 - \xi^2)} \right), \text{ sachant que } j^2 = -1$$

$$s(t) = \frac{K\omega_0}{\sqrt{(\xi^2 - 1)}} e^{-\omega_0 \xi t} \sin \left(\omega_0 \sqrt{(1 - \xi^2)} t \right) \quad (\text{III.11})$$

Le système est oscillant sous amorti.

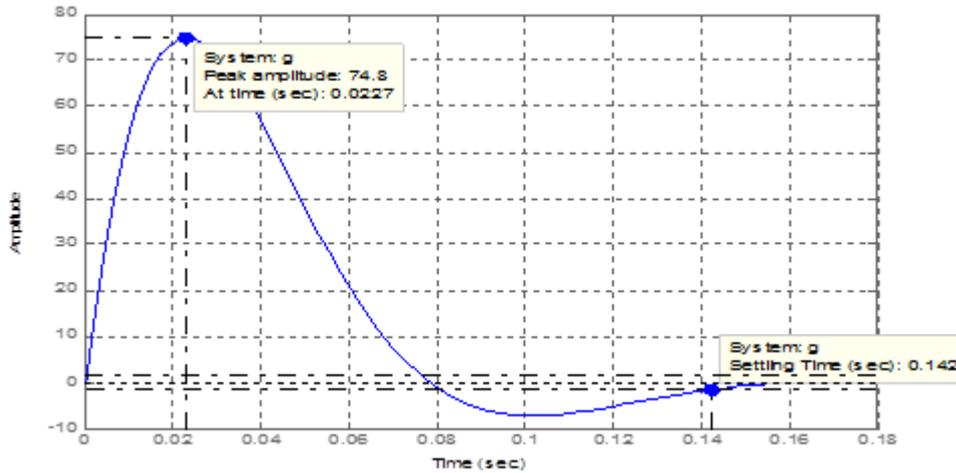


Figure III-6. Réponse Impulsionnelle pour $\xi < 1$

III-2-2-2. La réponse indicielle :

La réponse indicielle résulte quand le système est soumis à une entrée échelon $e(t) = au(t)$ dans le domaine temporel qui se traduit dans le domaine de Laplace par $E(p) = \frac{a}{p}$

$$S(p) = \frac{Ka}{p \left(\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} p + 1 \right)}$$

- Cas : $\xi > 1$ Le système est amorti et la réponse est apériodique

La réponse peut être décomposée en trois éléments

$$S(p) = \frac{Ka}{p \left(\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} p + 1 \right)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p-p_1)} + \frac{C}{(p-p_2)}$$

$$A = Ka, \quad B = \frac{Ka}{(p_1 - p_2)p_1} = \frac{Ka}{2\omega_0 \sqrt{(\xi^2 - 1)} p_1}, \quad C = \frac{Ka}{(p_1 - p_2)p_2} = \frac{Ka}{2\omega_0 \sqrt{(\xi^2 - 1)} p_2}$$

La réponse indicielle est la transformée inverse de Laplace $s(t) = L^{-1}[S(p)]$

$$s(t) = Ka \left[1 - \frac{1}{2\omega_0 \sqrt{(\xi^2 - 1)}} \left(\frac{e^{p_2 t}}{p_2} - \frac{e^{p_1 t}}{p_1} \right) \right]$$

En posant $p_1 = \frac{1}{\tau_1}$, et $p_2 = \frac{1}{\tau_2}$ on obtient :

$$s(t) = \left[1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left(\tau_1 e^{\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{\frac{t}{\tau_2}} \right) \right] \quad (\text{III.12})$$

Cas $\xi = 1 \Rightarrow \Delta = 0$ Le système possède une racine double

$$S(p) = \frac{Ka}{p \left(\frac{p^2}{\omega_0^2} + 1 \right)^2} = \frac{-Ka}{\left(\frac{p^2}{\omega_0^2} + 1 \right)^2} + \frac{-Ka}{\left(\frac{p^2}{\omega_0^2} + 1 \right)} + \frac{Ka}{p}$$

La réponse indicielle est la transformée inverse de Laplace $s(t) = L^{-1}[S(p)]$

$$s(t) = Ka(1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t})$$

Représentation graphique de la réponse indicielle pour le coefficient d'amortissement $\xi \geq 1$

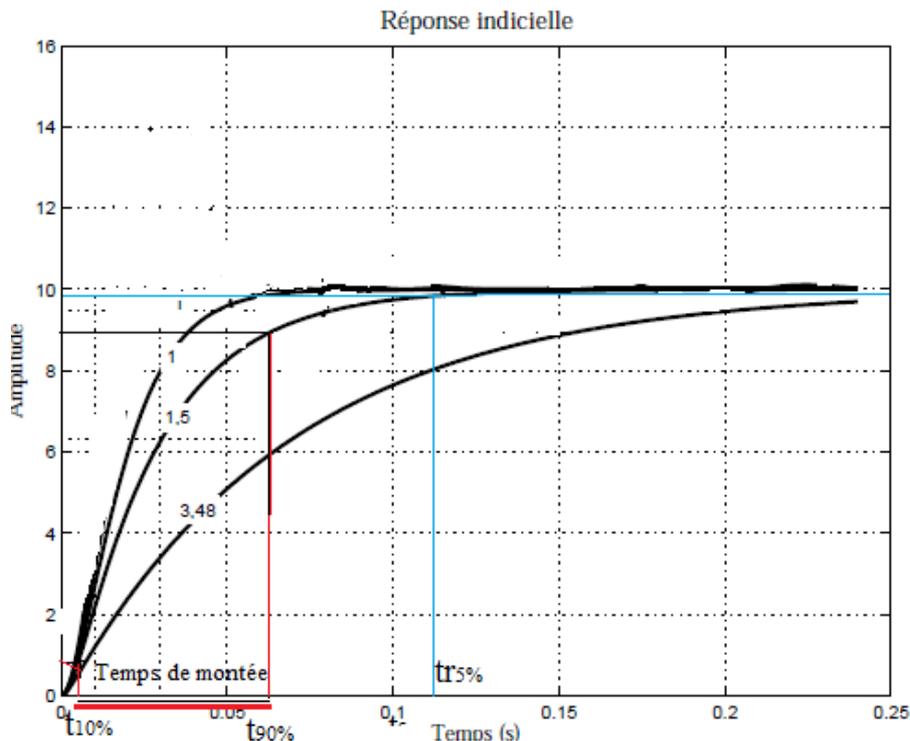


Figure III-7 . Réponse Indicielles pour $\xi > 1$ et $\xi = 1$

-Le temps de montée $t_m = t_{90\%} - t_{10\%}$ en boucle fermée $t_m \approx \frac{3}{\omega_{co}}$

- Le temps de réponse est compté quand le système atteint 95% la formule approximative

$$tr_{5\%} \approx \frac{3}{\xi \omega_{co}}$$

Cas $\xi < 1 \Rightarrow \Delta < 0$ Le système est sous amorti il est pseudopériodique, et possède deux pôles complexes, et peut se décomposer comme suit :

$$S(p) = \frac{Ka}{p\left(\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}p + 1\right)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp+C}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}p + 1}$$

Après calcul et identification, les constantes :

$A = Ka$, $B = -Ka$, et $C = -2Ka\xi\omega_0$ donc la réponse s'écrit :

$$S(p) = \frac{Ka}{p} - \frac{Kap + 2Ka\xi\omega_0}{p^2 + 2\xi\omega_0p + \omega_0^2}$$

Pour faire apparaître de nouvelles transformées de Laplace, il est utile d'ajouter et de retrancher dans le dénominateur de la deuxième partie du dénominateur le paramètre $\xi\omega_0^2$

$$S(p) = \frac{Ka}{p} - \frac{Kap + 2Ka\xi\omega_0}{p^2 + 2\xi\omega_0p + (\xi\omega_0)^2 - (\xi\omega_0)^2 + \omega_0^2} = \frac{Ka}{p} - \frac{Kap + 2Ka\xi\omega_0}{(p + \xi\omega_0)^2 + (\omega_0\sqrt{1-\xi^2})^2}$$

On multiplie le troisième membre par $\sqrt{1-\xi^2}$

$$S(p) = Ka \left(\frac{1}{p} - \frac{p + \xi\omega_0}{(p + \xi\omega_0)^2 + (\omega_0\sqrt{1-\xi^2})^2} - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \frac{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}{(p + \xi\omega_0)^2 + (\omega_0\sqrt{1-\xi^2})^2} \right)$$

Suivant le tableau des transformées de Laplace la réponse à un échelon $e(t) = au(t)$ est :

$$s(t) = Ka \left(1 - e^{-\xi\omega_0 t} \cos(\omega_0\sqrt{1-\xi^2} t) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_0\sqrt{1-\xi^2} t) \right)$$

En posant $\cos\varphi = \xi$, et $\sin\varphi = \sqrt{1-\xi^2}$

$$s(t) = Ka \left(1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin(\omega_0\sqrt{1-\xi^2} t + \varphi) \right) \quad \text{(III.13)}$$

- La pseudopériode T_s

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$$

-Le premier dépassement :

$$D\% = \frac{s(\infty) - s(0)}{s(\infty)} \cdot 100\% = 100 \cdot e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

-Le temps de réponse est calculée de façon approximative à 5%

$$tr_{5\%} \approx \frac{3}{\xi\omega_0}$$

-La représentation de la réponse d'un système du second ordre

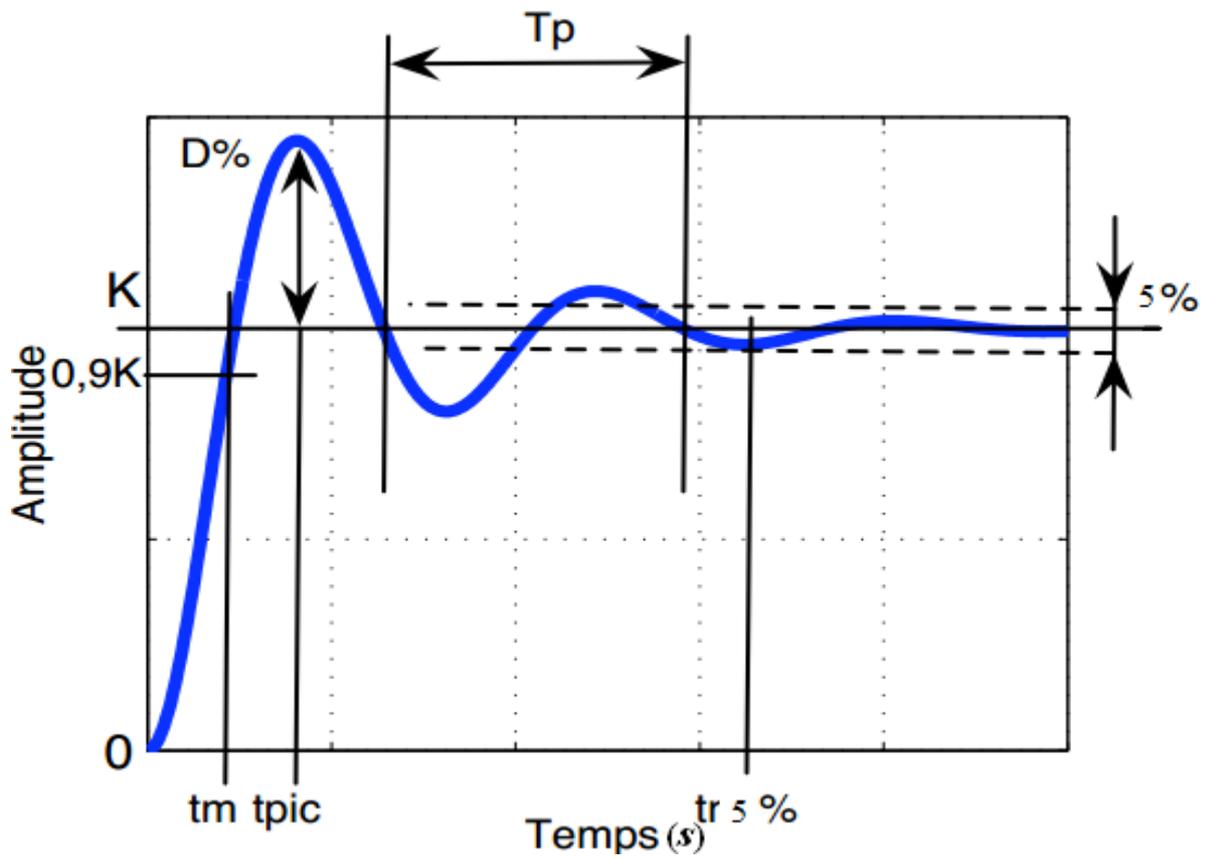


Figure III.8 Réponse indicielle d'un système du second ordre

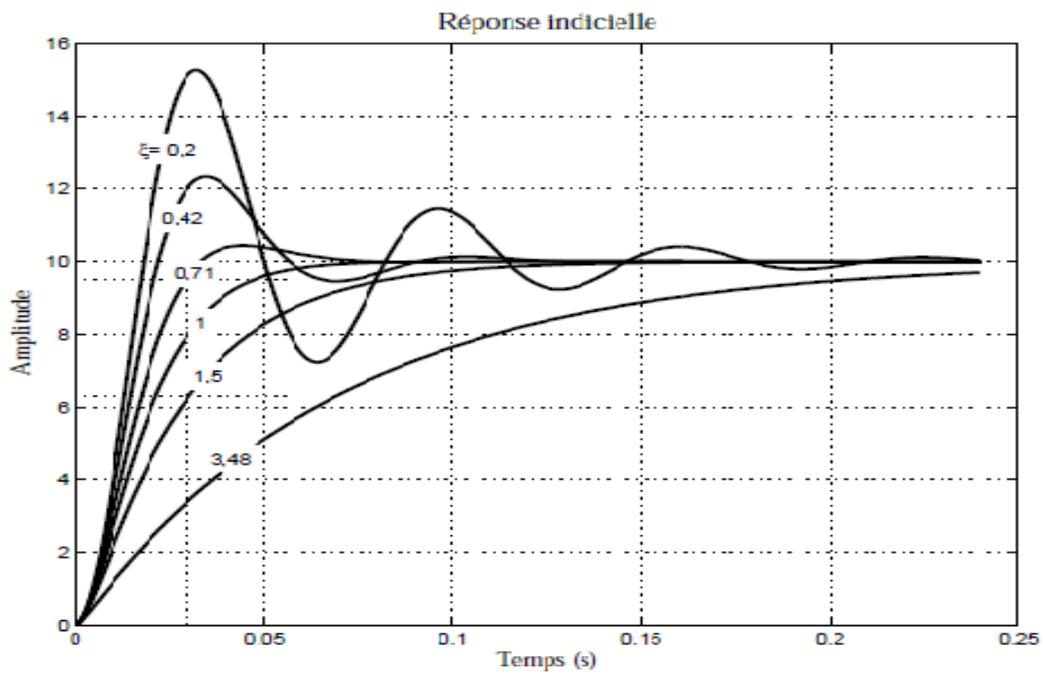


Figure III-9. Réponses Indicielles pour différentes valeurs de ξ

Fiche de TD N°3 REPONSES TEMPORELLES DES SYSTEMES

Exercice N°1 : On considère un système de fonction de transfert $G(p)$ comme suit :

$$F(p) = \frac{K}{1+0.1p}$$

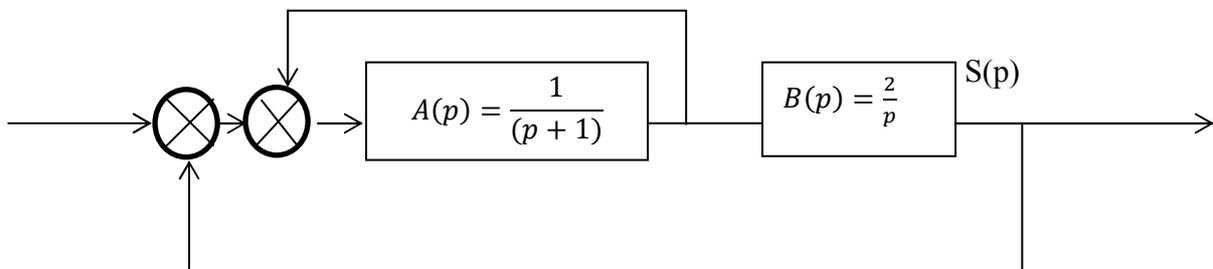
- 1-Calculer l'expression précise de la pulsation de coupure à 0 dB en fonction de K définie par $|F(j\omega_{c0})| = 1$; Montrer que si $K \gg 1$, alors $\omega_{c0} \approx K$
- 2-Calculer la valeur du gain K qui permet d'obtenir une pulsation $\omega_{c0} = 10$ rad/s.
- 3- Tracer la réponse impulsionnelle, et la réponse indicielle

Exercice N°2 : Soit un système don la fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par :

$$G(p) = \frac{1}{0.01p^2+0.4\xi p+1}$$

- 1-Calculer la fonction de transfert en boucle fermée.
- 2- Quelle est la valeur du premier dépassement pour les valeurs du coefficient d'amortissement en boucle fermée $\xi = 0.1$, et $\xi = 0.7$ Que constatez-vous ?
- 3- Calculer le temps de réponse à 5% pour les deux mêmes coefficients d'amortissement. Conclure.

Exercice N°2 : Soit le schéma fonctionnel suivant :



- 1- Calculer la fonction de transfert de la boucle fermée
- 2- Déterminer le coefficient d'amortissement ξ , le gain statique K , et la pulsation naturelle ω_0

Exercice N°3 : On considère un système du second ordre ayant comme fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{3}{10p^2 + 5p + 2}$$

1. Déduire ξ ; K et ω_0 .
2. Tracer la réponse indicielle.

Exercice N°4 : On considère le système mécanique. L'application d'une force $f(t)$ (entrée du système) sur le système provoque des oscillations de la masse m suivant la direction $x(t)$ (la sortie du système). Le système est constitué, en plus de la masse m , d'un ressort de raideur k et d'un amortisseur de coefficient b . Voir figure.1

La réponse indicielle est représentée dans la figure.2

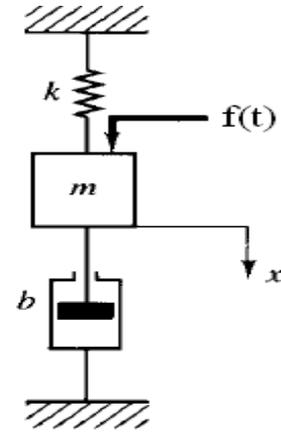
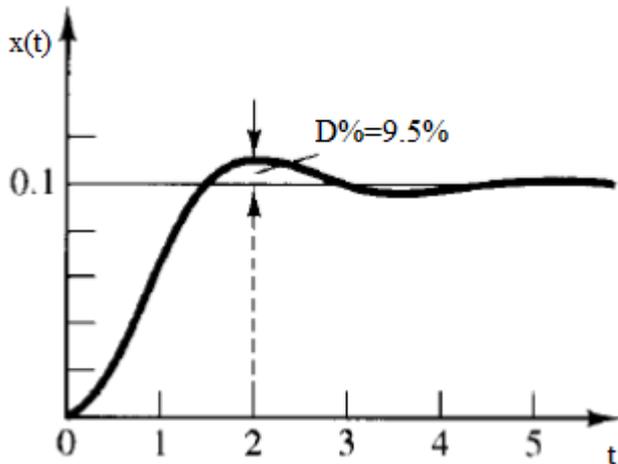


Figure.1

L'équation différentielle décrivant ce système est la suivante :

$$mx'' + bx' + kx = f$$

1. Déterminer la fonction de transfert de ce système ;
2. A partir de la figure illustrant la réponse du système à un échelon $f(t) = 2N.m$, déterminer les valeurs numériques des paramètres du système (k, m, b).

Le dépassement $D \% = 9,5\%$ correspond à un amortissement $\xi = 0,6$.

CHAPITRE IV

Performances des systèmes asservis linéaires

Dans le domaine temporel

IV-1. Analyse temporelle : l'entrée est un signal qui varie en fonction du temps, permet d'évaluer les performances en rapidité, précision, stabilité.

Exemple : tester les performances d'un missile.

IV-1-1. La Stabilité:

-L'étude des performances consiste à étudier :

- La stabilité et la rapidité qui sont deux critères dynamiques.
- La précision qui est un critère statique.

-De manière générale on dira qu'un système est stable si, écarté de sa position d'équilibre, il y revient.

-La condition fondamentale de la stabilité précise qu'un système linéaire est stable à la condition nécessaire est suffisante que tous les pôles de la fonction de transfert sont réels négatifs ou complexes à partie réelle négative

- Soit un système asservi dans une boucle à retour unitaire, définit par sa fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$.

La fonction de transfert en boucle fermée $F(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)}$

- Analyser le système asservi linéaire revient à étudier la fonction de transfert en boucle ouverte.

- Soit l'équation caractéristique $1 + G(p) = 0$

-Les racines de cette équation représentent les pôles du système

Exemple : soit un système définit par sa fonction de transfert en boucle ouverte :

$$F(p) = \frac{1}{0.25p^2 + 0.25p + 1}$$

Sa Fonction de transfert en boucle fermée :

$$G(p) = \frac{1}{0.25p^2 + 0.25p + 2}$$

L'équation caractéristique :

$$D(p) = 0.25p^2 + 0.25p + 2 = 0$$

Les pôles : $\begin{cases} p_1 = -0.5 + 1.94j \\ p_2 = -0.5 - 1.94j \end{cases}$

Les deux pôles sont complexes à partie réelle négatives le système est donc stable.

- Pour les systèmes d'ordre élevé, la résolution numérique pour déterminer les pôles du système peut être laborieuse et même impossible, pour cette raison un certain nombre de méthodes alternatives ont été développées pour caractériser la stabilité d'un système.

IV-1-2. Critère de Routh-Hurwitz :

-Le critère de Routh-Hurwitz permet de déterminer le signe des racines de l'équation caractéristique sans pour autant avoir à calculer leur valeur.

-Ce critère s'applique quand le système est en boucle fermée

- Ce critère est applicable si tous les coefficients du polynôme caractéristique sont de même signe

- Soit le polynôme caractéristique d'ordre n suivant :

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p^1 + a_0 \quad (IV.1)$$

Le critère se définit par la construction d'un tableau comme suit :

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...	a_0
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...	a_1
p^{n-2}	b_1	b_2	b_3
p^{n-3}	c_1	c_2	c_3		...
...		
p^0	y_1	y_2		...	

Calculs des paramètres :

$$b_1 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2} - a_{n-3} \cdot a_n}{a_{n-1}} ; \quad b_2 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-4} - a_n \cdot a_{n-5}}{a_{n-1}} \quad (IV.2)$$

$$c_1 = \frac{b_1 \cdot a_{n-3} - a_{n-1} \cdot b_2}{b_1} ; \quad c_2 = \frac{b_1 \cdot a_{n-5} - b_3 \cdot a_{n-1}}{b_1}$$

-La condition nécessaire et suffisante de stabilité s'exprime par un tableau de *Routh* par :

- Tous les a_i doivent être présents et sont strictement de même signe et non nuls.
- Tous les coefficients de la première colonne du tableau doivent être strictement de même signe
- Si un seul coefficient est nul alors le système est dit marginalement instable.
- Le nombre de changement de signe dans la première colonne du tableau est égal au nombre de pôles à partie réelle positive, et donc le système est instable.

Remarque : Si parmi les éléments de la première colonne est égal à zéro, il est remplacé par le plus petit nombre positif ϵ pour continuer de compléter le tableau.

Application : Soit un système défini par sa fonction de transfert en boucle fermée comme suit :

$$H(p) = \frac{K}{p^4 + 5p^3 + 3p^2 + 16p + 1}$$

En utilisant le critère de Routh conclure quant à la stabilité du système ?

Solution

Le tableau de Routh

p^4	1	3	1
p^3	5	16	0
p^2	-0.2	1	0
p^1	41	0	0
p^0	1	0	0

Il ya deux changements de signe donc deux poles instables \Rightarrow Le système est instable

IV-1-3. Précision statique et précision dynamique :

La précision statique ou erreur statique (ou erreur de position) du système est caractérisée par l'erreur en régime permanent en réponse à un 'échelon :

D'après le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) \tag{IV.3}$$

Avec $\varepsilon(p) = E(p) - S(p)$ $E(p) \rightarrow$ la transformée de Laplace de l'entrée

$S(p) \rightarrow$ la transformée de Laplace de la sortie

On parlera de précision dynamique dès que l'entrée du système évolue de manière continue dans le temps : par exemple on désigne par erreur de vitesse la valeur de l'erreur quand l'entrée du système est une rampe.

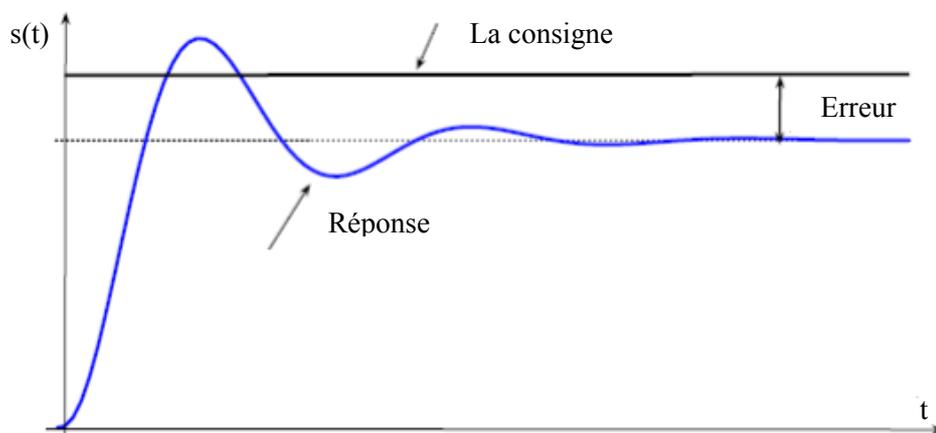


Figure IV-1. Réponse d'un système du second ordre avec une erreur statique avec la

IV-1-4.Classes des systèmes : La précision d'un système dépend du nombre d'intégrateurs insérés dans la boucle ouverte décrite par la fonction de transfert suivante :

$$F(p) = \frac{K}{p^\alpha(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0)}$$

α : Représente la classe du système

n : Représente le degré du système

Tableau des précisions des systèmes selon leur classe

Classe du système	0	1	2	$\alpha > 2$
Erreur de position	$1/(1+K)$	0	0	0
Erreur de vitesse	∞	$1/K$	0	0
Erreur d'accélération	∞	∞	$1/K$	0

Fiche de TD N°4 : PERFORMANCES DES SYSTEMES TEMPORELS

Exercice N°1 : On considère un système en boucle ouverte régi par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 3 \frac{ds(t)}{dt} + 2 s(t) = e(t)$$

- 1-Calculer la fonction de transfert
- 2-Quelle est l'erreur à une entrée rampe $e(t) = t$ quand le système est placé dans un retour unitaire
- 3- Calculer les pôles du système, conclure de sa stabilité

Exercice N°2 : Soit les systèmes en boucle fermée définis par leur fonction de transfert :

$$F_1(p) = \frac{K}{p^4+7p^3+17p^2+17p+6} \quad \text{Et} \quad F_2(p) = \frac{K}{p^4+2p^3+2p^2+5p+6}$$

- 1- en utilisant le critère de Routh, analyser la stabilité de ces systèmes ?

Exercice N°3: Soit un système de fonction de transfert en boucle ouverte placé dans une boucle de régulation à retour unitaire :

$$G(p) = \frac{K}{(p-1)(p+10)^2} \quad K \geq 0$$

- 1-Déterminer la ou les valeurs de K pour laquelle le système est stable en utilisant le critère de Routh

Exercice N°4: Un système est défini par sa fonction de transfert en boucle ouverte

$$H(p) = \frac{K}{p(p+1)(p+2)} \quad K \geq 0$$

- 1-En utilisant le critère de Routh, calculer la valeur de K , pour laquelle le système est stable
- 2- Donner les expressions de l'erreur de position et de l'erreur de vitesse (rampe unitaire ($R(p) = \frac{1}{p^2}$), en fonction de K .
- 3-Comment évolue l'erreur de trainage (vitesse) lorsque augmente K ?
- 4- Quelle est la valeur de K pour que l'asservissement ait une erreur de vitesse de 0.2 ?
- 5- Discuter de la stabilité de l'asservissement pour cette valeur de K

CHAPITRE V

Etude fréquentielle des systèmes asservis

V-1 Systèmes du premier ordre

V-1-1 : Etude harmonique et réponse fréquentielle d'un système d'un système du premier ordre

$$F(p) = \frac{K}{1+\tau p}, \text{ en posant } p = j\omega, \quad F(j\omega) = \frac{K}{1+j\tau\omega}$$

Sachant que : $\tau = \frac{1}{\omega_0}$ avec ω_0 la pulsation propre du système

V-1-2. Lieux de bode : Les lieux de bode sont représentés par les variations simultanés du gain en décibels et de la phase du système

On obtient alors un nombre complexe dont le module et l'argument sont :

$$\left. \begin{aligned} |F(j\omega)| &= \frac{K}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \\ \varphi &= -\text{Arctan}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.1})$$

Le calcul du gain en décibels

$$|F(j\omega)|_{db} = 20\log K - 20\log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Tableau N° 1 valeurs de la pulsation dans le lieu de transfert de bode

Valeurs de ω	$\omega \ll \omega_0$	$\omega = \omega_0$	$\omega \gg \omega_0$
Gain (module) en décibels	$ F(j\omega) _{db} = 20\log K$	$ F(j\omega) _{db} = 20\log K - 20\log\sqrt{2} = 20\log K - 3db$	$ F(j\omega) _{db} = 20\log K - 20\log\omega$
Phase (argument) en degrés	$\varphi = 0$	$\varphi = -\arctan 1 = -45^\circ$	$\varphi = -\arctan(\infty) = -90$

Les tracés asymptotiques des lieux de bode, se présentent par la courbe du gain en décibels du système en fonction de la fréquence exprimée en décades dans un système d'axes semi logarithmique. Et de la courbe de la phase correspondante en fonction des mêmes valeurs de la fréquence

-Représentation graphique de bode

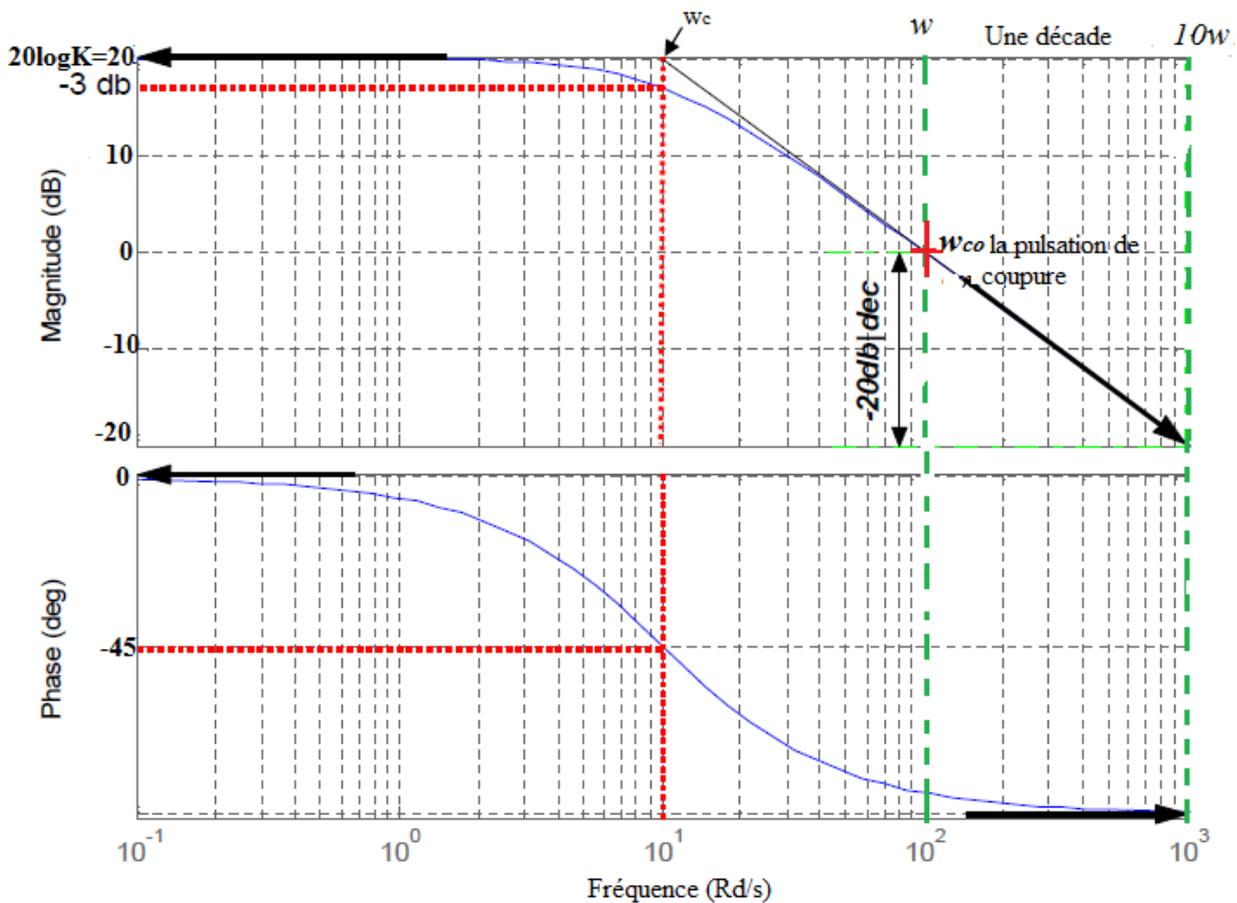


Figure V.1 . Tracé asymptotique de bode

V-1-3 :Le lieu de Nyquist : Le lieu de Nyquist s'effectue dans le plan complexe par la variation de la partie imaginaire en fonction de la partie réelle.

$$-F(j\omega) = \frac{K}{1+j\tau\omega} = \frac{K}{1+\tau^2\omega^2} - j \frac{K\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2}$$

$$x = \frac{K}{1+\tau^2\omega^2}, \quad y = -\frac{K\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2} \Rightarrow \tau^2\omega^2 = \frac{K}{x} - 1 \text{ et } y = -x\tau\omega$$

On remplace $\tau\omega$ par sa valeur dans l'équation de y on obtient un cercle de rayon $\frac{K}{2}$ et de centre $(\frac{K}{2}, 0)$:

$$y^2 + \left(x - \frac{K}{2}\right)^2 = \frac{K^2}{4} \quad (\text{V.2})$$

Quelques valeurs de la pulsation sur le lieu de transfert

- $x = K \quad y = 0 \quad \omega = 0$
- $x = \frac{K}{2} \quad y = -\frac{K}{2} \quad \omega = \frac{1}{\tau}$
- $x = 0 \quad y = 0 \quad \omega \rightarrow \infty$

- Représentation graphique de Nyquist

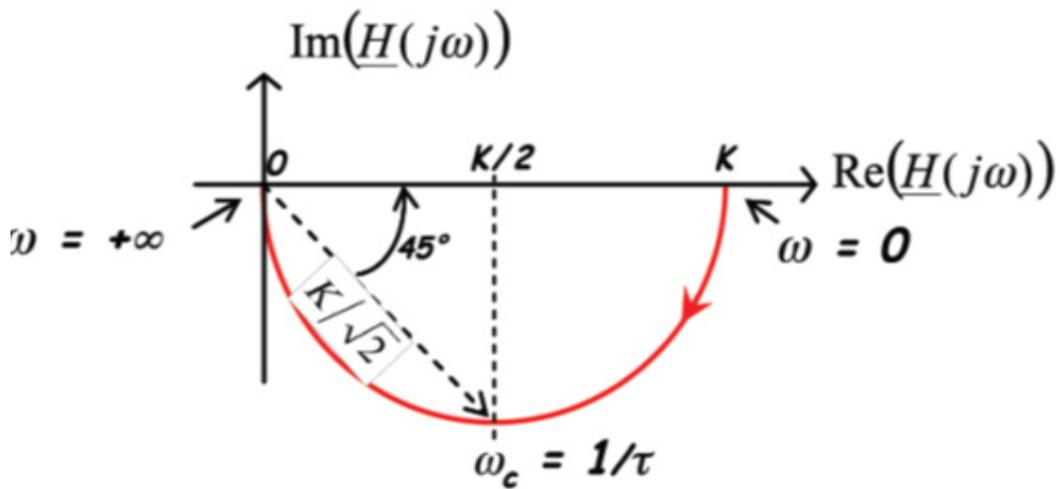


Figure V.2. Lieux de Nyquist d'un système du premier ordre

V-1-4 : Réponse fréquentielle de Black Nichols :

Le tracé du lieu de Black s'effectue par la variation du gain en décibels en fonction de la phase

$$|F(j\omega)|_{db} = f(\varphi) \quad (IV3)$$

Tableau N° 2 valeurs de la pulsation dans le lieu de transfert de Black

$ F(j\omega) _{db} = 0$	$Arg[F(j\omega)] = 0$	$\omega = 0$
$ F(j\omega) _{db} = -3db,$	$Arg[F(j\omega)] = 45^\circ$	$\omega_c = \frac{1}{\tau}$
$ F(j\omega) _{db} = -\infty$	$Arg[F(j\omega)] = -90^\circ$	$\omega = \infty$

- Représentation graphique de Black Nichols

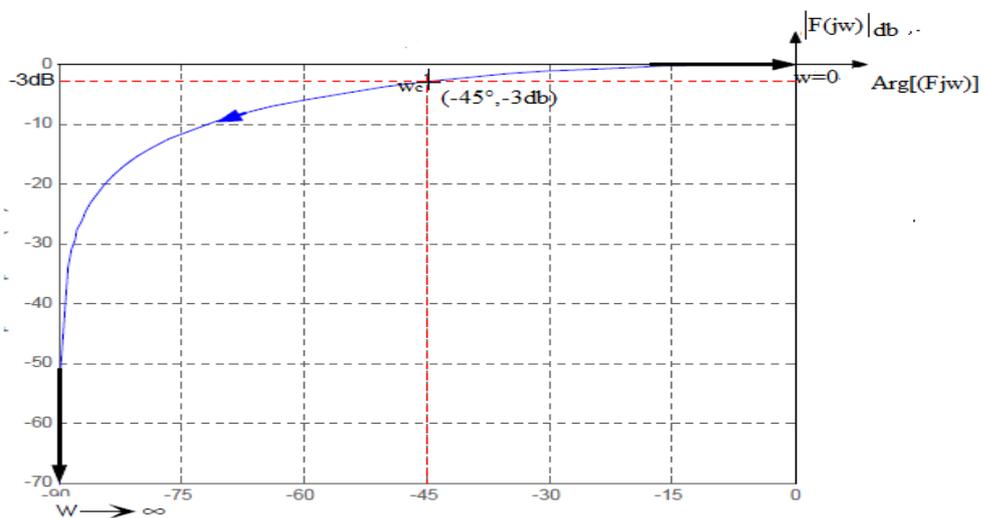


Figure v.3. Lieux de transfert de Black

V-2. Systèmes du second ordre

V-2-1 L'étude harmonique et réponse fréquentielle d'un système du second ordre:

Un système du second ordre est décrit par une fonction de transfert comme suit :

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} p + 1}$$

- Cas : $\xi > 1$ Le système est amorti et la fonction de transfert peut s'écrire de la façon

Suivante $F(p) = \frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$ en posant $p = j\omega \Rightarrow F(j\omega) = \frac{K}{(1+j\tau_1\omega)(1+j\tau_2\omega)}$

Avec $\frac{1}{\tau_1} = \omega_1$ et $\frac{1}{\tau_2} = \omega_2$ telque $\omega_1 < \omega_2$

-Le système s'exprime comme deux système du premier ordre

V-2-2. Diagramme de bode

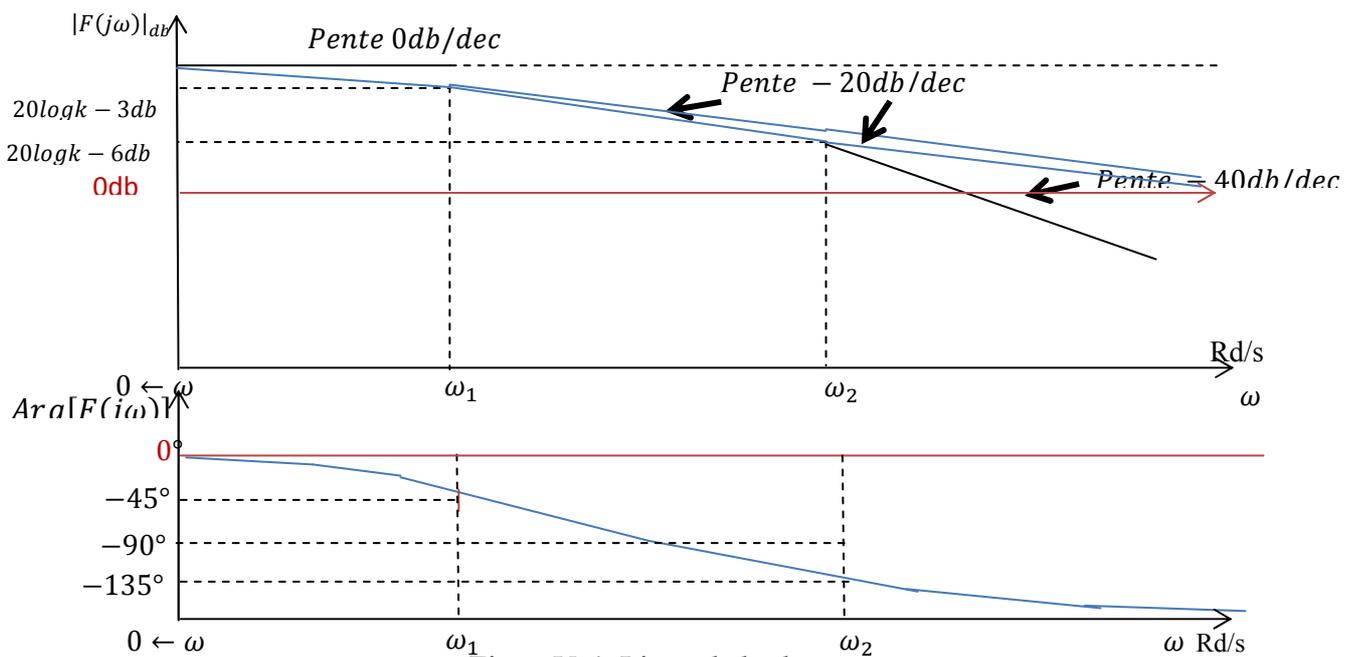
-Le diagramme de bode s'illustre par le tracé du gainen décibels et de la phase du système en fonction de la fréquence

$$|F(j\omega)|_{ab} = 20\log K - 20\log\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_1^2}} - 20\log\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_2^2}} \quad (V.4)$$

$$\varphi(j\omega) = -\text{Actan}\frac{\omega}{\omega_1} - \text{Actan}\frac{\omega}{\omega_2}$$

Tableau-N°.1 Valeurs du gain en Décibels et la phase en degrés

ω	$\omega \ll \omega_1$	$\omega = \omega_1$	$\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$	$\omega = \omega_2$	$\omega \gg \omega_2$
$ F(j\omega) _{ab}$	$ F(j\omega) _{ab} = 20\log K$	$ F(j\omega) _{ab} = 20\log K - 20\log\sqrt{2}$	$ F(j\omega) _{ab} = 20\log K - 20\log\omega$	$ F(j\omega) _{ab} = 20\log K - 20\log\omega - 20\log\sqrt{2}$	$ F(j\omega) _{ab} = 20\log K - 40\log\omega$
$\text{Arg}[F(j\omega)]^\circ$	0	-45°	-90°	-135°	-180



FigureV-4. Lieux de bode

V-2-2 Les lieux de Nyquist

- Le tracé de nyquist s'effectue par la variation du module de la fonction de transfert du système en fonction de sa phase.

Tableau N° 2. Valeurs du gain et de la phase en fonction de la fréquence

ω	$\omega \ll \omega_1$	$\omega = \omega_1$	$\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$	$\omega = \omega_2$	$\omega \gg \omega_2 \rightarrow +\infty$
$ F(j\omega) $	K	$\frac{K}{\sqrt{2}}$	$\frac{K}{\omega}$	$\frac{K}{\omega + \sqrt{2}}$	0
φ	0	-45°	-90°	-135°	-180

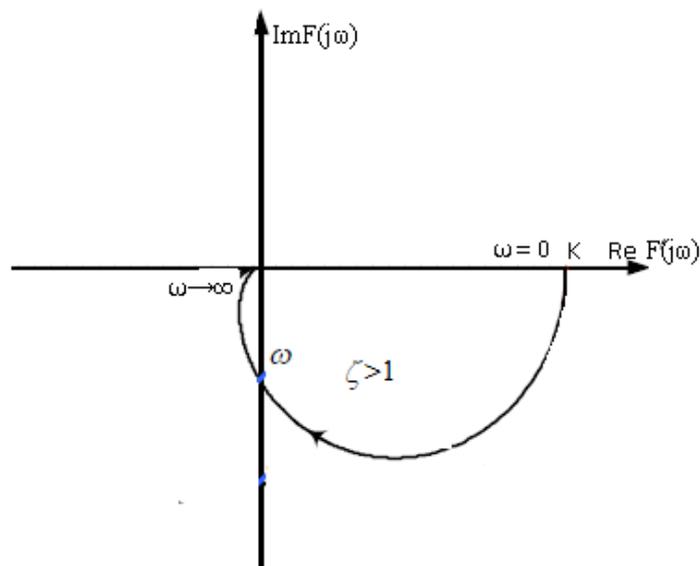
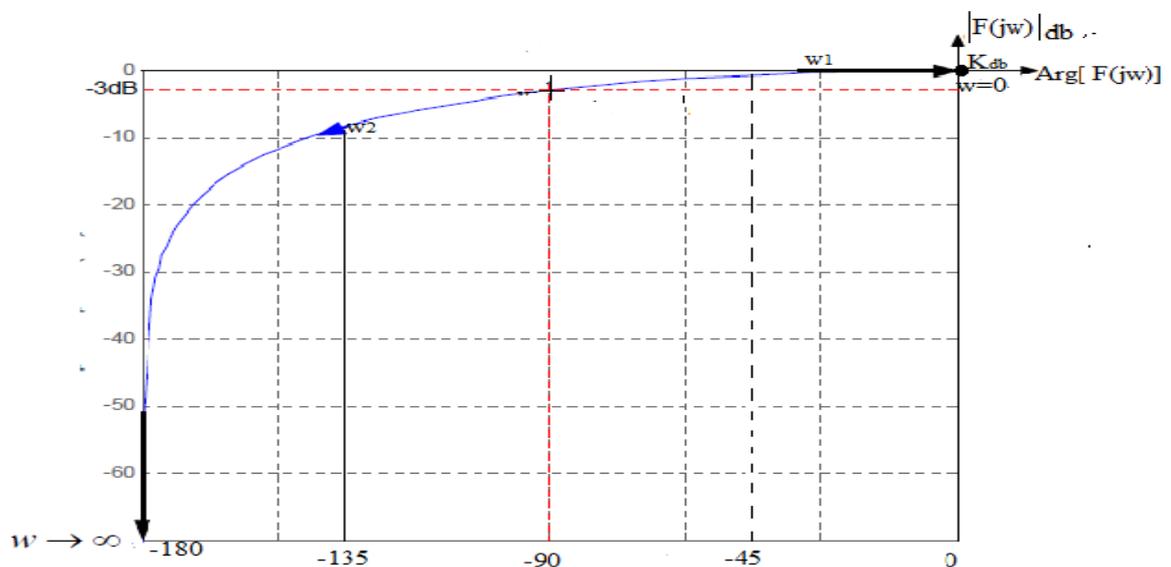


Figure V- 5 . Lieux de Nyquist

V-2-3 Le tracé de Black Nichols :

-Les lieux de Black montrent la variation du gain en décibels en fonction de la phase suivant l'accroissement de la fréquence . Voir tableau N°1 pour les valeurs.



FigureV-6. Lieux de black-Nichols

- Cas $\xi = 1 \Rightarrow \Delta = 0$ Le système possède une racine double

$$F(p) = \frac{K}{(1+\tau p)^2} \text{ en posant } p = j\omega \Rightarrow F(j\omega) = \frac{K}{(1+j\tau\omega)^2} \quad \text{Avec } \frac{1}{\tau} = \omega_0$$

Tableau-N°3. Valeurs du gain et de la phase $\xi=1$

ω	$\omega \ll \omega_0$	$\omega = \omega_0$	$\omega \gg \omega_0$
$ F(j\omega) _{db}$	$ F(j\omega) _{db} = 20\log K$	$ F(j\omega) _{db} = 20\log K - 20\log 2$	$ F(j\omega) _{db} = 20\log K - 40\log \omega$
$Arg[F(j\omega)]^\circ$	0	-90°	-180°

-Cas $\xi < 1 \Rightarrow \Delta < 0$ Le système est sous amorti il est pseudopériodique, et possède deux poles

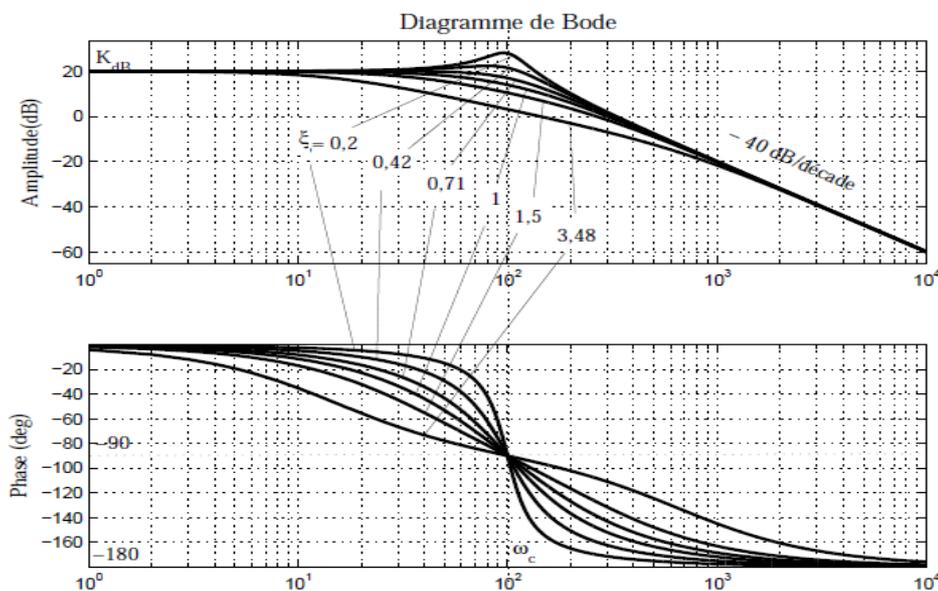
$$|F(j\omega)|_{db} = 20 \log K - 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (V.5)$$

$$Arg[F(j\omega)] = -Arctan \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}$$

Tableau-N°4. Valeurs du gain et de la phase $\xi > 1$

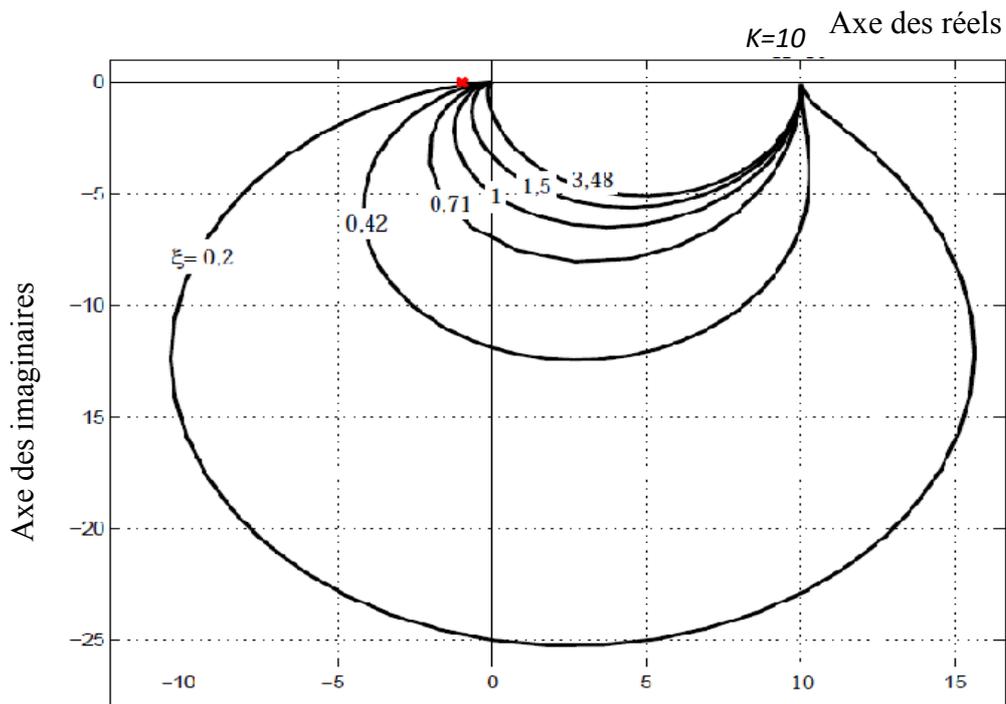
ω	$\omega \ll \omega_0$	$\omega = \omega_0$	$\omega \gg \omega_0$
$ F(j\omega) _{db}$	$ F(j\omega) _{db} = 20\log K$	$ F(j\omega) _{db} = 20\log K - 20\log 2\xi$	$ F(j\omega) _{db} = 20\log K - 40\log \omega$
$Arg[F(j\omega)]^\circ$	0	-90°	-180°

V-2-4. Tracés de bode pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement ξ :



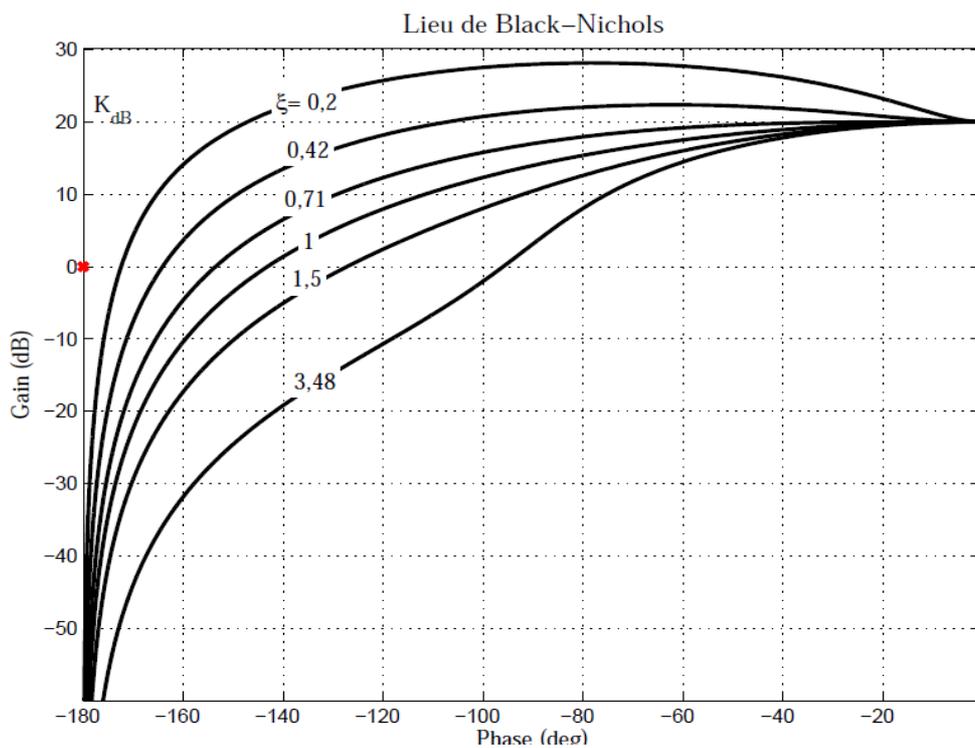
FigureV-7. Lieux de bode pour différentes valeurs de ξ

V-2-5. Tracés de Nyquist pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement ξ



FigureV-8.Lieux de nyquist pour différentes valeurs de ξ

V-2-6. Tracés de Black-nichols pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement ξ



FigureV-9.Lieux de Black Nichols pour différentes valeurs de ξ

Exercice N°1: Soit un système du premier ordre défini par sa fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{3}{1+10p}$$

1- tracer les diagrammes de bode , de nyquist, et de Black

Exercice N°2: Tracer le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase) d'un système de fonction de transfert $G(p)$ défini par :

$$G(p) = \frac{1000(p+1)}{p(p+10)}$$

Exercice N°3: Tracer le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase) d'un système de fonction de transfert $G(p)$ défini par :

$$G(p) = \frac{(p+1)(p+10)}{(p+10)^2}$$

Montrer que le diagramme de Bode asymptotique de gain possède une symétrie par rapport à la droite d'équation $\nu = 10$ et en déduire la valeur maximale précise G_{\max} du gain.

Déterminer, pour la pulsation ν_{\max} correspondant à ce maximum, la valeur du déphasage.

Exercice N°4: On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte :

$$T(p) = \frac{K}{(p+1)(p+2)} \quad K=25$$

Tracer son diagramme de Nyquist

Exercice N° 5: On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ que l'on souhaite réguler à l'aide d'une boucle à retour unitaire :

$$G(p) = \frac{K}{(10p+1)^2(p+1)}$$

Pour $K = 10$, Tracer les diagrammes de Bode, Nyquist et de Black et montrer sur les graphiques les marges de stabilité

CHAPITRE VI

Performances des systèmes asservis dans le domaine fréquentiel

VI-1. Analyse fréquentielle : l'entrée est un signal qui varie en fonction de la fréquence permet d'évaluer les performances filtrage, bande passante, déphasage etc... C'est une approche souvent d'un électronicien.

Exemple : tester des enceintes acoustiques.

VI-2. Les Marges de stabilité

- Soit l'équation caractéristique $1 + G(j\omega) = 0$ (VI.1)

- Le module $|G(j\omega)| = 1$

- L'argument $ArgG(j\omega) = Arg(-1) = -\pi$

L'étude la stabilité des systèmes par leur tracé de (*Nyquist, Bode et Black*), revient à étudier la stabilité en boucle fermée à partir de la boucle ouverte ; et d'évaluer les marges de stabilités

VI-2-1. Marge de gain

La marge de gain permet d'indiquer la qualité de la stabilité en exprimant la distance *sur l'axe réel* par rapport au point critique $(-1,0)$ L'intersection de la réponse harmonique avec l'axe réel a lieu pour une pulsation notée $\omega\pi$, car la phase pour cette pulsation vaut $-\pi$.

$$MG = \frac{1}{|G(j\omega\pi)|} \text{ avec } ArgG(j\omega) = -\pi \quad (VI.2)$$

VI-2-2.Marge de phase

La marge de phase permet d'indiquer la qualité de la stabilité en exprimant la distance *angulaire* par rapport au point critique $(-1,0)$. L'intersection de la réponse harmonique avec le cercle unité a lieu pour une pulsation notée ω_1 car le module pour cette pulsation vaut 1.

$$M\varphi = \pi + ArgG(j\omega_{c0}) \text{ avec } |G(j\omega_{c0})| = 1 \quad (VI.3)$$

système a une stabilité confortable pour : $6db \leq MG \leq 12db$; et $M_\varphi \geq 45^\circ$

VI-3. Critère de stabilité

VI-3-1. Le critère de bode

Evaluer le degré de stabilité d'un asservissement dans le plan de Bode revient à connaître sa valeur à proximité de son gain Odb et la phase -180° . Le point (Odb, -180°) correspond au point critique $(-1, 0)$ dans le plan de Nyquist).

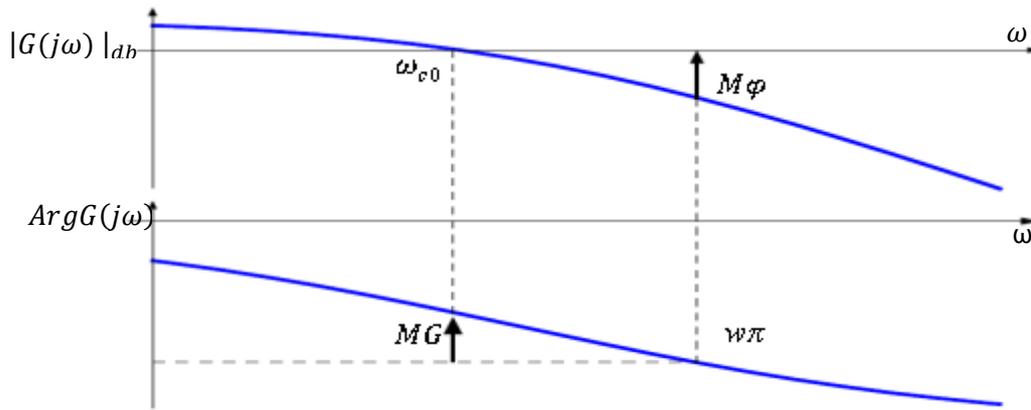


Figure VI-1. Lieux de bode avec les marges de stabilité

VI-3-2. Critère de Nyquist :

Si le tracé dans le plan complexe de la réponse harmonique en boucle ouverte laisse le point critique $(-1,0)$ à sa droite tel que $|T(j\omega\pi)| > 1$, le système est instable, dans le cas $|T(j\omega\pi)| < 1$, le système est stable.

Le critère de *Nyquist* simplifié ou critère du Revers : Si, en parcourant la courbe de la réponse harmonique en boucle ouverte dans les sens des pulsations croissantes, laisse le point $(-1,0)$ à sa gauche, le système en boucle fermée est stable

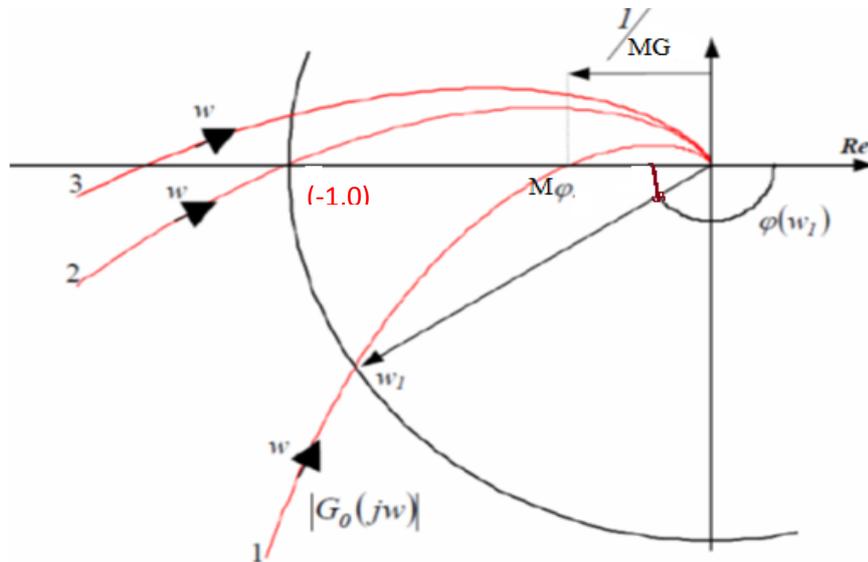


Figure VI-2. Lieux de nyquist par rapport au point $(-1,0)$

- Le système représenté par la courbe N°1 est stable
- Le système représenté par la courbe N°2 est à la limite de stabilité
- Le système représenté par la courbe N°3 est instable

Pour se prononcer sur la stabilité il est plus simple de s'intéresser à la marge de phase et à la marge de gain

VI-3-3. Critère de Black :

Un système linéaire en boucle fermée est stable si, sa réponse harmonique en boucle ouverte parcourt le lieu Black dans le sens des pulsations croissantes, en laissant le point critique $(-1,0)$ représenté $(0\text{ dB}; -180^\circ)$ à droite.

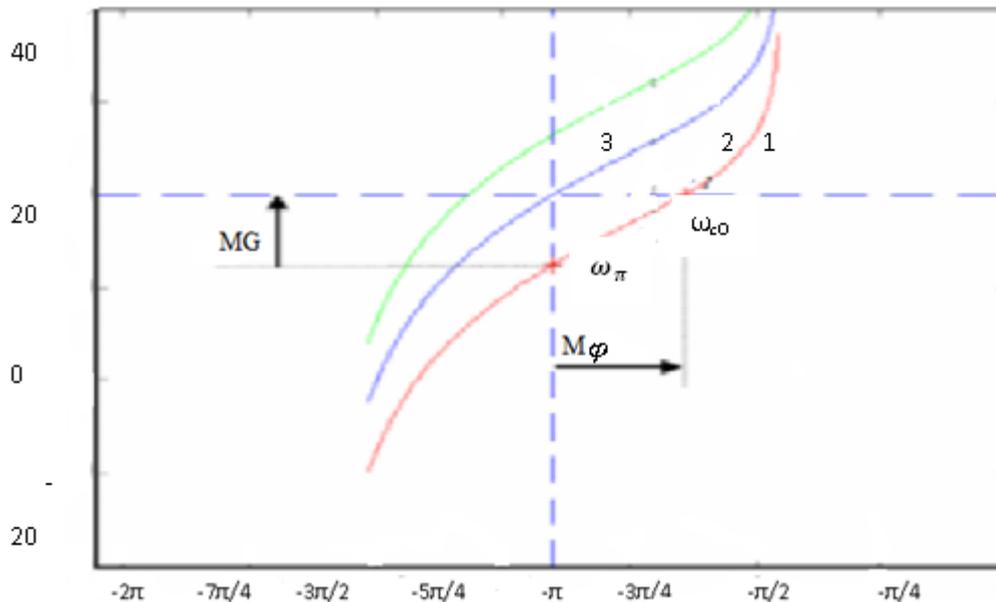


Figure.VI.3 Lieux de Black avec les marges de stabilité

- Le système représenté par la courbe N°1 est stable
- Le système représenté par la courbe N°2 est à la limite de stabilité
- Le système représenté par la courbe N°3 est instable

Application : Un système de fonction de transfert en boucle fermée est comme suit :

$$F(p) = \frac{K}{(1+5p)^3}$$

Ce système est mis dans un asservissement à retour unitaire.

- 2- Quelle est la valeur du gain K qui assure au système une marge de phase $M\varphi = 45^\circ$
- 3- Calculer la marge de gain pour cette valeur de K

Solution :

$$1- \quad M\varphi = \pi + \text{Arctan } F(j\omega_{c0}), \quad \text{Avec } |F(j\omega_{c0})| = 1 = \frac{K}{\sqrt{(1+(5\omega_{c0})^2)^3}}$$

$$\omega_{c0} = 5\text{rd/s} \quad K=15662$$

$$\text{La marge de gain : } MG = \frac{1}{|F(j\omega_\pi)|} \quad \text{avec } \text{Arg}G(j\omega) = -\pi$$

$$\text{Calcul de } \omega_\pi; \quad \pi = \text{Arctan } G(\omega_\pi/5) \quad \omega_\pi = 8.66\text{rd/s}, \quad : MG = 5.2$$

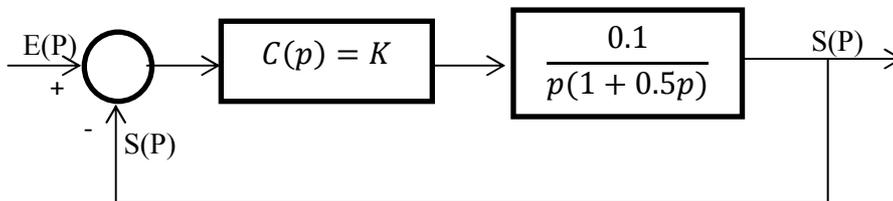
Fiche de TD N°5 Performances des systèmes dans le domaine temporel

Exercice N°1 : On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte:

$$T(p) = \frac{K}{(p+10)^3}$$

Déterminer la valeur de K qui assure au système une marge de gain égale à 6 dB. Calculer la marge de phase pour cette valeur de K , le système est-il stable ?

Exercice N°2 : Soit un moteur asservi en position dans une boucle de régulation, comme le montre le schéma suivant:



- 1- Tracer le diagramme asymptotique de bode , e
- 2- Analyser la stabilité du moteur :
 - a-Montrer que le système est stable pour $K > 0$
 - b- Donner la marge de gain et la valeur de K pour laquelle la marge de phase vaut 45°

Exercice-N°3 : On considère un système de fonction de transfert en boucle ou

$$F(p) = \frac{K}{p(p+1)(p+2)} \quad k > 0$$

1. Tracer son diagramme de Nyquist
2. Etudier sa stabilité.
3. Faites le tracé de Black-Nichols pour $K=2$ et reporter dessus la marge de phase et de gain.

Exercice N°4: Un système est décrit par sa fonction de transfert en boucle ouverte par :

$$F(p) = \frac{K}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} \quad \text{Avec } K > 0 \quad \omega_n = \sqrt{3} \text{ rd/s}$$

Le tracé asymptotique de bode du système en boucle ouverte est représenté dans la figure 1

- En vous aidant des résultats exprimés par ce tracé, déduire la valeur approchée du coefficient d'amortissement ξ et celle du gain statique K

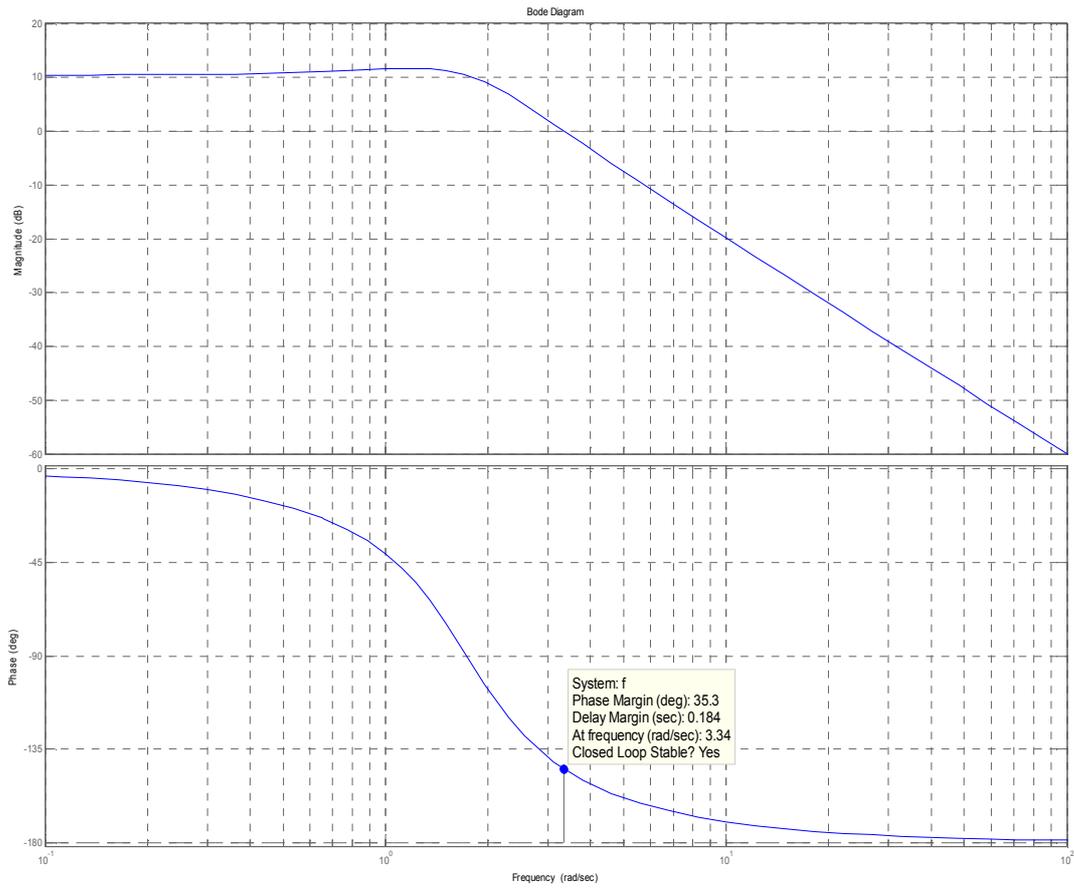


Figure. 1

CHAPITRE VII

La correction des systèmes asservis

VII-1. La problématique de la correction des systèmes asservis:

L'objectif de la correction des systèmes asservis est de contraindre le système à suivre le comportement dicté par un cahier des charges. Voir figure suivante

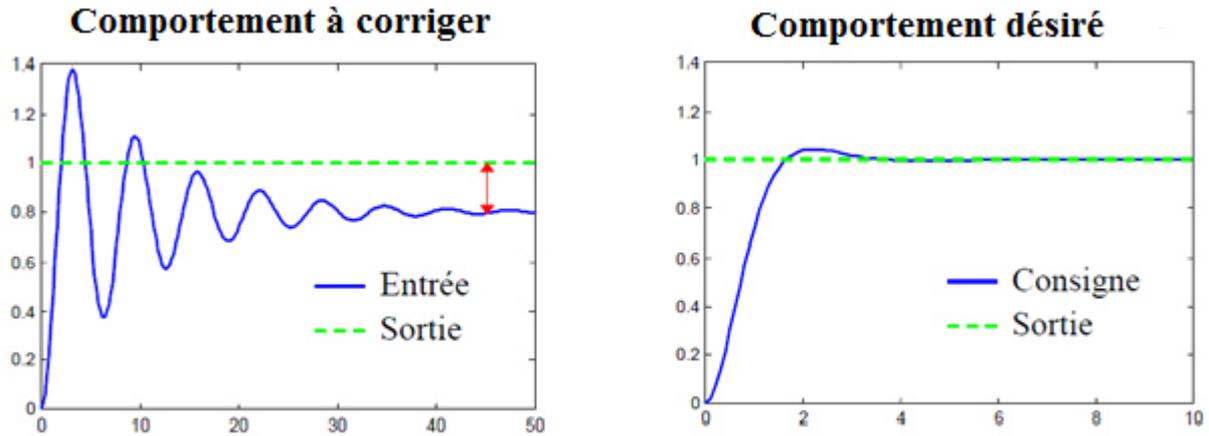


Figure VII.1A gauche réponse mal amortie non corrigée, à droite réponse corrigée amortie

- Réponse mal amortie → -Réponse bien amortie
- Ecart avec l'entrée en régime établi → - L'écart effacé ⇒ Erreur statique nulle

On introduit en général dans la chaîne directe en amont du système un dispositif de correction composé d'un Correcteur $C(p)$ et d'un Actionneur $A(p)$, pour élaborer une Loi de commande $U(p)$ afin d'optimiser un système :

- mal amorti, ou dans un cas instable
- lent
- peu précis

VII-2. Les méthodes de corrections :

Le rôle du correcteur est d'élaborer un signal de commande U à l'actionneur à partir du signal d'erreur ε à corriger

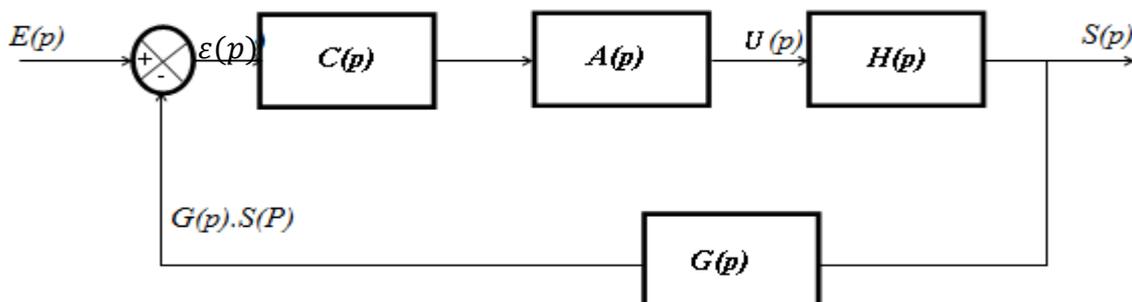


Figure V-2. Correction en série avec l'actionneur

Dans ce cas le correcteur est placé dans la chaîne de retour de la boucle fermée formée avec l'actionneur

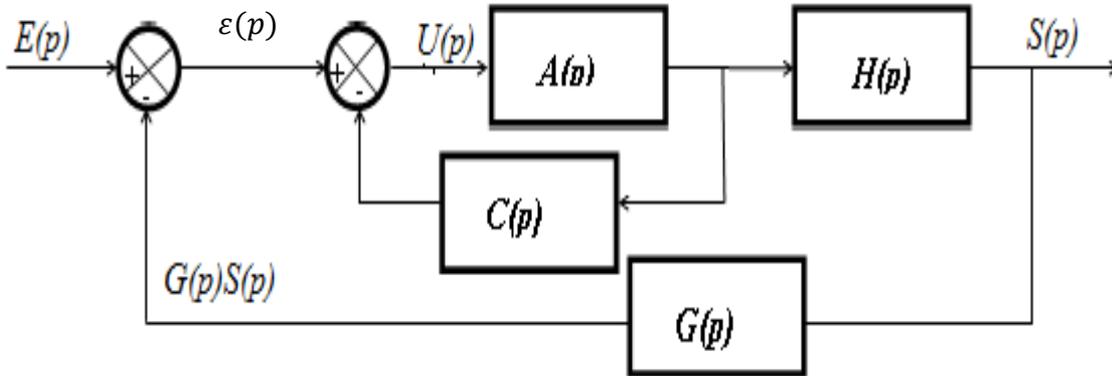


Figure VII-3. Correction en parallèle avec l'actionneur

VII-3 : Les correcteurs usuels :

Les correcteurs qui modifient le gain du système

- Correcteur proportionnel (P)
- Correcteur intégral (I)
- Correcteurs proportionnel-intégral (PI), à retard de phase

Les Correcteurs qui modifient la marge de phase

- Correcteur proportionnel dérivé (PD)
- Correcteur à avance de phase

Correcteur qui réalise les deux actions

- Correcteur proportionnel-intégral-dérivateur (PID)

VII-3-1 : Le correcteur proportionnel P

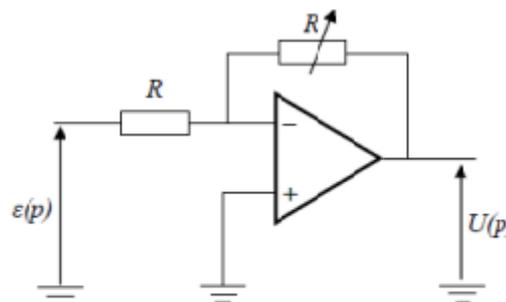


Figure VII.4 Schéma d'un correcteur proportionnel

a- La loi de commande

- Le correcteur est un gain de fonction de transfert $C(p) = K$
- La loi de commande du système

$$U(t) = K\varepsilon(t); \quad U(p) = K\varepsilon(p) \tag{VII.1}$$

b- Les effets du correcteur dans l'analyse fréquentielle en posant $p = j\omega$

-Tracé de bode de la fonction de transfert d'un système corrigé en boucle ouverte

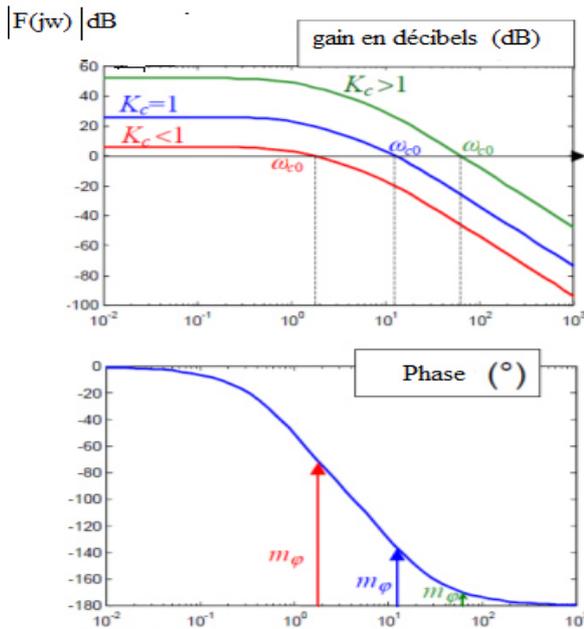


Figure VII-5. Influence du gain statique

- $Kc > 1$
- translation du diagramme de gain de Bode vers le haut
 - augmentation de $\omega_{co} \Rightarrow$ augmentation de la rapidité
 - diminution de la marge de phase (dégradation de la stabilité en BF)

- $Kc < 1$
- translation du diagramme de gain de Bode vers le bas
 - diminution de $\omega_{co} \Rightarrow$ diminution de la rapidité
 - Augmentation de la marge de phase (Amélioration de la stabilité)

En conclusion

Le correcteur à action proportionnelle ne permet pas de réaliser de bonnes performances en termes de précision statique et dynamique et en rejet de perturbation. Un faible gain K donne généralement un système stable, mais une erreur de position importante. Par contre, une grande valeur de K , donne une meilleure erreur de position mais des mauvaises performances en transitoire : plus K augmente, plus on tend vers l'instabilité.

Le diagramme de Bode montre l'apparition d'une instabilité est liée à la valeur de K

VII-3-2 Le correcteur proportionnel intégral

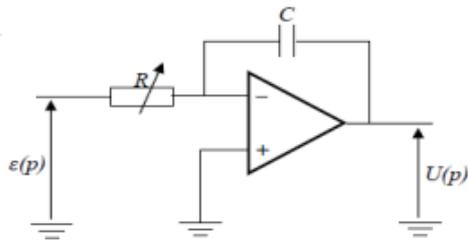
a- La loi commande intégrale :

- La loi de commande :

$$u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau ; \quad U(p) = \frac{1}{T_i p} \varepsilon(p) \tag{VII.2}$$

- La fonction de transfert du correcteur :

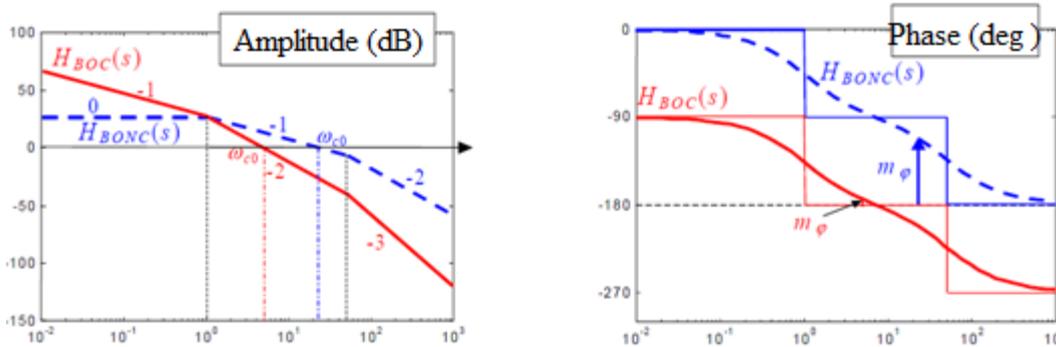
$$C(p) = \frac{1}{T_i p} \quad \text{Avec } T_i \text{ la constante d'intégration.}$$



FigureVII-6. Schéma d'un correcteur intégral

b- Les effets de l'intégrateur dans le domaine fréquentiel :

-Le diagramme de bode



D

Augmentation des pentes de +20dB/décade

Translation du diagramme de la phase vers le bas

Figure VII.7A gauche le tracé du gain, à droite le tracé de la phase. Bleu non corrigé, rouge corrigé

- Réduction de la marge de phase ce qui entraîne une dégradation de la stabilité, voire l'instabilité.

➤ L'ajout d'un Intégrateur dans la boucle ouverte augmente la classe du système, annule l'erreur statique

Conclusion : Le correcteur Intégral n'améliore que la précision; les autres performances sont dégradées, il sera en général associé à un correcteur proportionnel

c - Le correcteur PI : Combinaison des correcteurs P et I

➤ La loi de commande : $u(t) = K\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$ (VII.3)

➤ La fonction de transfert $C(p) = K + \frac{1}{T_i p}$

-Il est tout à fait réalisable physiquement

- C'est le correcteur le plus utilisé.

d- Synthèse d'un correcteur PI :

e- Réglage : Le correcteur PI est placé de façon à ne pas modifier la marge de phase
Plus T_i est grande, plus l'action intégrale est faible ce qui implique que :

$$\frac{1}{T_i} \leq \frac{\omega_{c0}}{10}$$

Exemple 1 : Réponse fréquentielle du système corrigé :

- Tracé de bode :

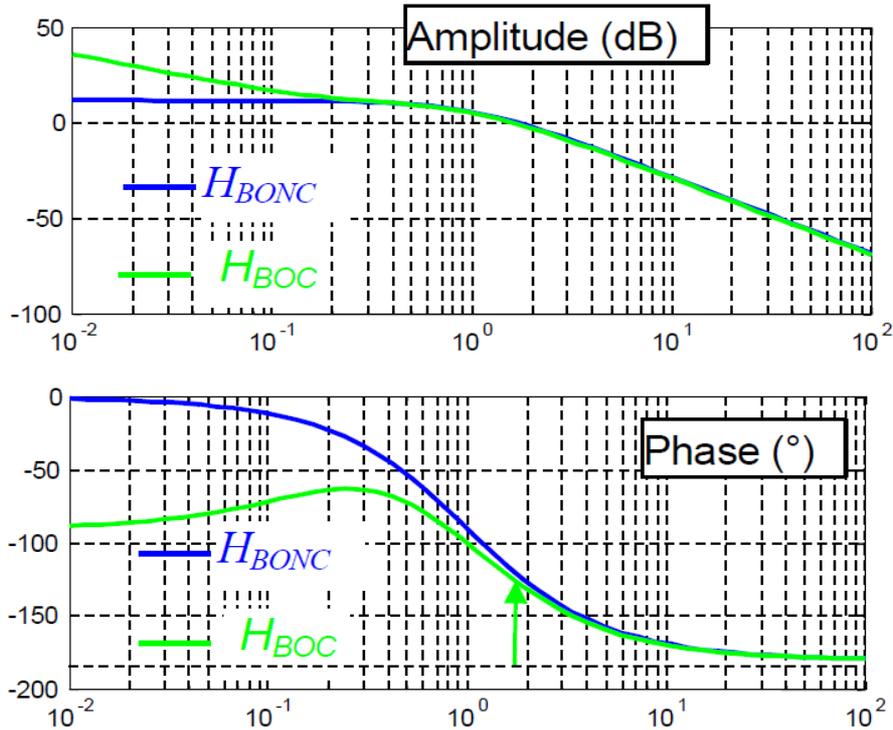


Figure VII-8. En bleu Système non corrigé, en vert système corrigé

Exemple 2 : Réponse indicielle d'un système corrigé :

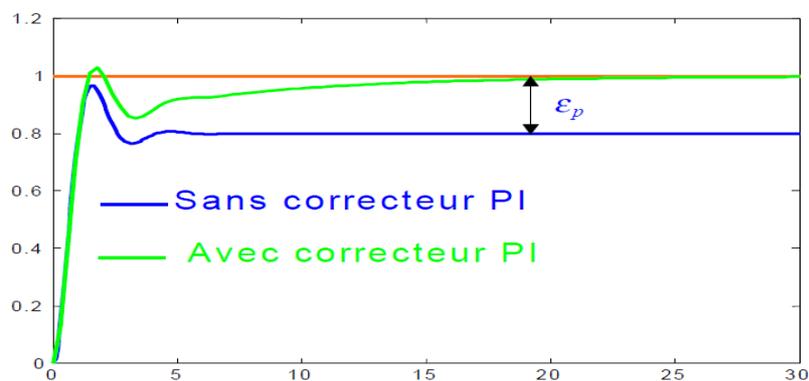


Figure VII-9. Réponse d'un système asservi à un échelon

On remarque l'annulation de l'erreur statique, avec une lenteur à atteindre la consigne.

Pour y remédier, on peut baisser la valeur de T_i mais cela modifierait le réglage de la marge de phase. Donc dans certains cas il est préférable d'utiliser un correcteur à retard de phase

VII-3-3 Le correcteur proportionnel dérivé PD:

a- la commande dérivée :

➤ La loi de commande $u(t) = K\varepsilon(t) + KT_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$ (VII.4)

➤ La fonction de transfert $C(p) = K(1 + T_d p)$

Plus T_d est grande, plus l'action dérivée est importante

Le terme "dérivée" procure un gain élevé aux hautes fréquences, donc amplification des bruits (perturbations) créé par des signaux parasites.

➤ Le schéma d'un correcteur Dérivé

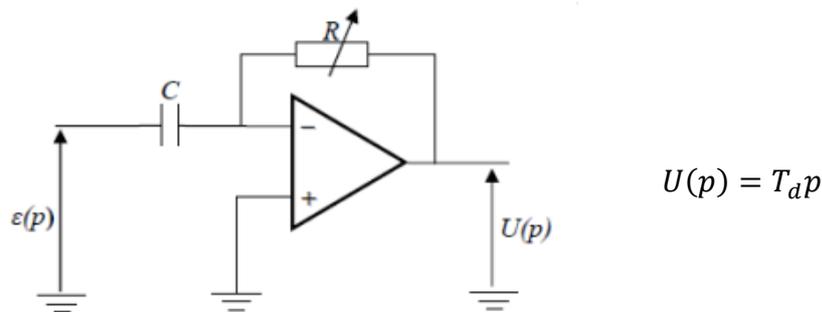
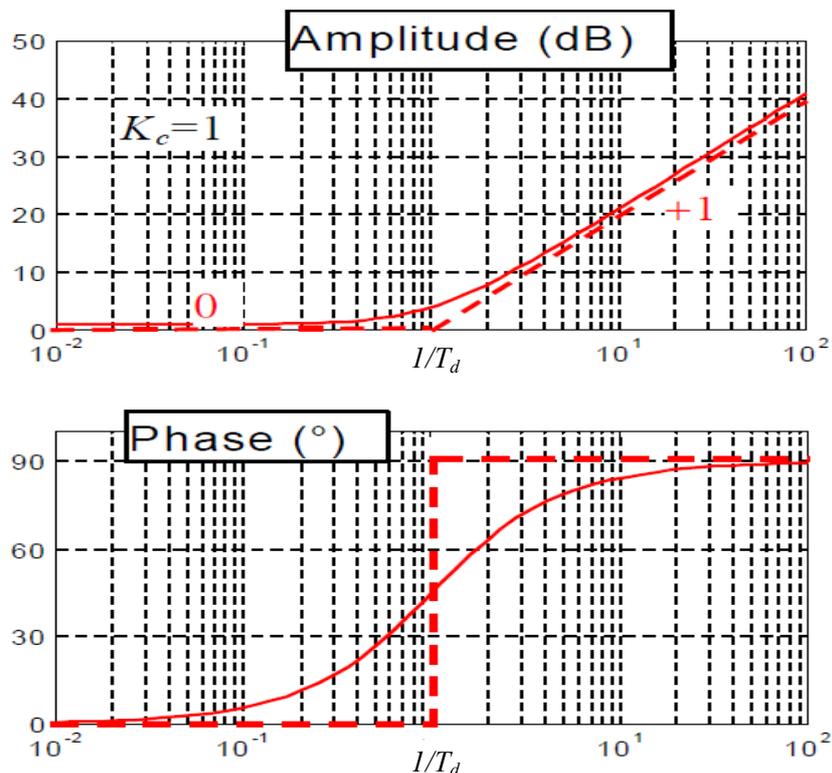


Figure VII-10. Schéma dun correcteur Dérivé

b : Réponse fréquentielle



FigureVII-11 Tracé de bode du correcteur Dérivé

➤ **Avantages**

- L'avance de la phase de 90° pour les pulsations $\omega \gg \frac{1}{T_d}$, améliore la marge phase M_ϕ
- L'augmentation de la pulsation ω_{c0} améliore la rapidité du système et donc un meilleur temps de réponse

➤ **Inconvénients**

-Amplification en hautes fréquences des bruits ce qui nécessite les réglages du gain K pour obtenir une pulsation ω_{c0} imposée, et de la constante de temps T_d pour obtenir la marge de phase M_ϕ nécessaire.

Le correcteur Dérivé n'est pas réalisable et pour pallier à cet inconvénient on utilise un filtre du premier ordre pour une action pseudo-dérivée de fonction de transfert :

$$C(p) = \frac{T_d p}{1 + \tau p}$$

VII-3-4 Le correcteur proportionnel Intégral dérivé PID:

a- La commande combinée Intégrale dérivée

Ce correcteur combine les actions des trois correcteurs à savoir l'action proportionnelle, l'action intégrale et l'action dérivée simultanément.

➤ La loi de commande : $u(t) = K\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + K T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$ (VII.5)

➤ La fonction de transfert : $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right) = K \left(\frac{T_i T_d p^2 + T_i p + 1}{T_i p} \right)$

Ce correcteur permet d'améliorer les performances globales du système, il est utilisé suivant deux structures.

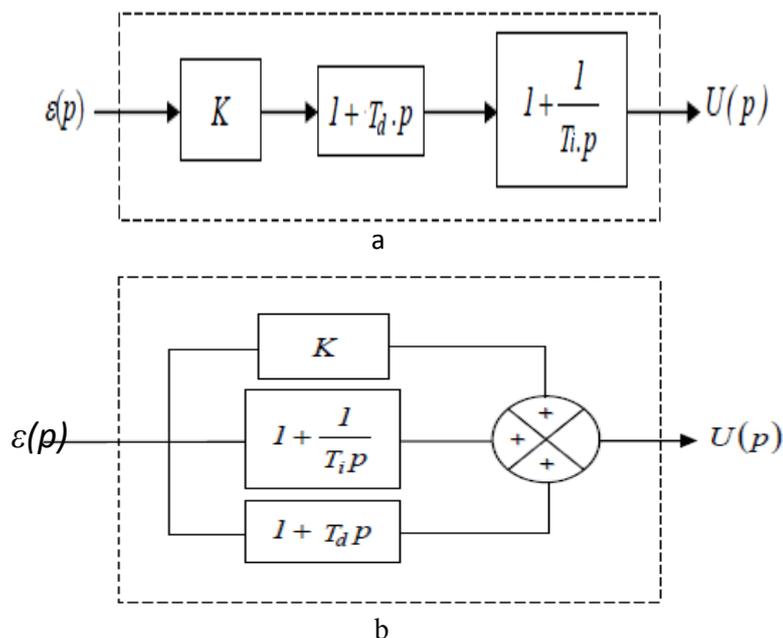


Figure VII-12. Structure du correcteur PID, -a- en série, -b- en parallèle

Le correcteur dépend essentiellement des valeurs des constantes T_i et T_d donc :

$$\text{Si } T_i > 4 T_d \quad C(p) = K \left(\frac{T_i T_d p^2 + T_i p + 1}{T_i p} \right) = K \frac{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}{T_i p} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T_i = T_1 + T_2 \\ T_d = T_1 T_2 \end{cases}$$

Ceci montre que les zéros (racines) sont réels.

$$\text{Si } T_i < 4 T_d \quad C(p) = K \left(\frac{T_i T_d p^2 + T_i p + 1}{T_i p} \right) = K \frac{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}{T_i p} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T_i = 2\xi T \\ T^2 = T_i T_d \end{cases} \text{ et } \xi < 1$$

Dans ce cas les zéros sont complexes conjugués.

b- La réponse fréquentielle du correcteur PID:

Le tracé est la somme des tracés des réponses des correcteurs PI et PD

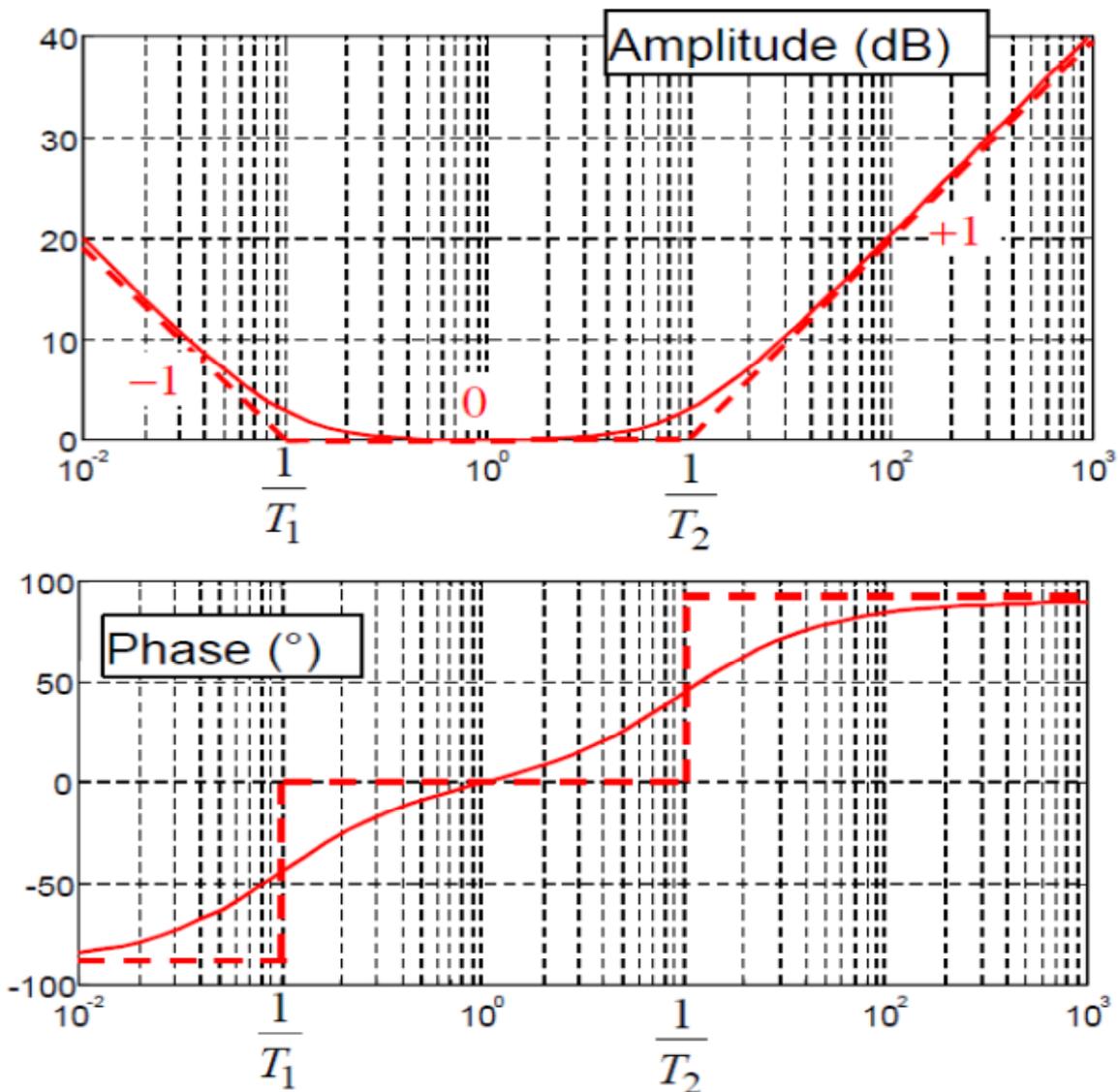


Figure VII.13. Réponse fréquentielle du correcteur PID

VII-4 Les correcteurs spécifiques adaptés

On peut adapter une correction spécifique à un cas traité pour un asservissement particulier au lieu d'utiliser un régulateur PID

VII-4-1 : Les correcteurs à retard de phase

Le correcteur à retard de phase est une forme approchée du correcteur PI. Il réalise une action intégrale (augmentation du gain en basses fréquences) sans introduire d'intégrateur.

La fonction de transfert du correcteur :

$$C(p) = K \frac{1+T_i p}{1+bT_i p} \quad (\text{VII.6})$$

Où en pratique on choisit $b = K$

-Réponse fréquentielle du correcteur

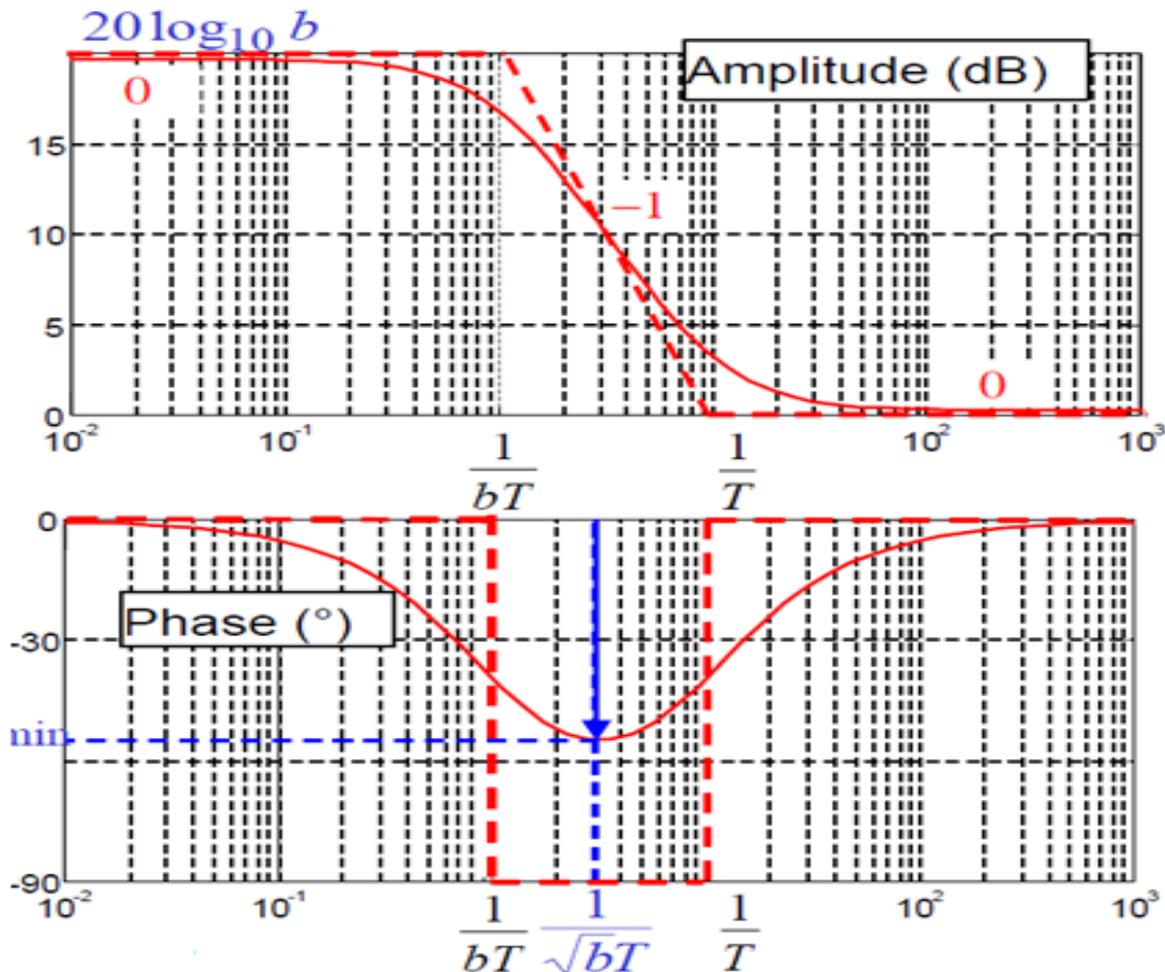


Figure.VI.14. Réponse fréquentielle du correcteur à retard de phase

Comme son nom l'indique ce correcteur introduit dans le système à corriger une diminution de la phase par un déphasage négatif défini par la formule suivante :

$$\varphi_{min} = \text{Arcsin} \frac{1-b}{1+b} \text{ en Rad}$$

Avec la pulsation correspondante donnée par la formule ci-dessous

$$\omega_{min} = \frac{1}{T\sqrt{b}}$$

Réglage du correcteur :

- Introduire dans le correcteur un gain K' qu'on calcule pour avoir la marge de phase désirée
- Calculer $K=b$ pour obtenir la précision imposée
- Choisir la constante de temps T_i telle que $\frac{1}{T_i} \leq \frac{\omega_{c0}}{10}$ pour ne pas modifier la marge de phase et les performances dynamiques

VII-4-2 Le correcteur à avance de phase :

Comme son l'indique ce correcteur apporte au système le manque de phase. Le correcteur à avance de phase est une forme approchée du correcteur PD qui est physiquement irréalisable.

La fonction de transfert :
$$C(p) = K \frac{1+aTp}{1+Tp} \tag{VII.7}$$

La réponse fréquentielle du correcteur :

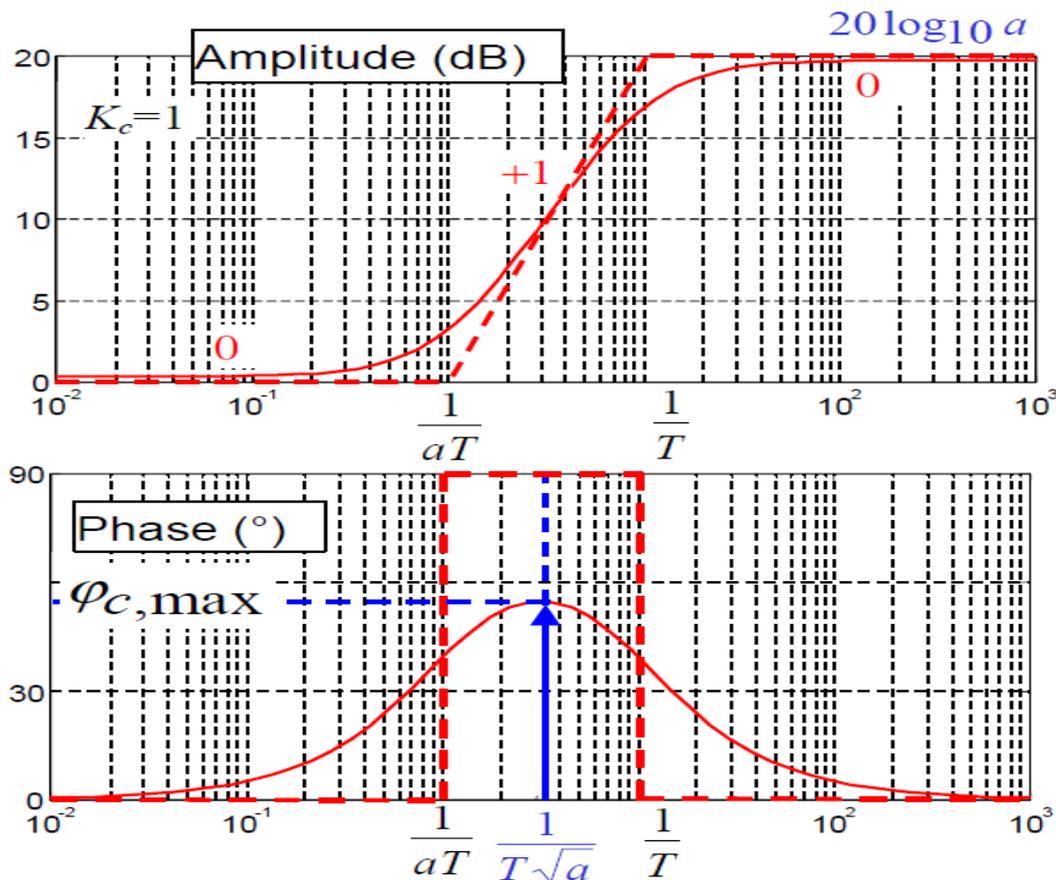


Figure.VI.15. Réponse fréquentielle du correcteur à avance de phase

D'après le diagramme de bode les contraintes pouvant être satisfaites sont :
 - L'augmentation de la marge de phase par l'introduction d'un déphasage positif de 90 d'où le nom de correcteur à avance de phase.

-La phase maximale qui peut être ajoutée est montrée sur le tracé de la phase par la forme d'une cloche. Sa valeur est calculée par la fonction suivante :

$$\varphi_{max} = \arcsin \frac{a-1}{a+1} \text{ en rad}$$

-L'augmentation de la bande passante ω_{c0} ce qui entraîne l'augmentation de la rapidité c à diminution du temps de réponse $t_{r5\%}$, La valeur de ω_{c0max} correspondant à φ_{max} est donnée par :

$$\omega_{c0max} = \frac{1}{T\sqrt{a}}$$

Réglage du correcteur :

Avec la valeur choisie (désirée) de la phase à ajouter le calcul de a s'effectue

Avec la valeur de $\omega_{c0max} = \omega_{c0}$ correspondant à φ_{max} sur la cloche le calcul de T s'effectue

Le gain fréquentiel est augmenté de $20\log a$. Ceci décale vers les hautes fréquences la pulsation ω_{c0} du système corrigé en BO pour cela il faut calculer la valeur du gain K du système avec correcteur à ω_{c0} désirée

Exemple :

La réponse fréquentielle d'un système de fonction de transfert

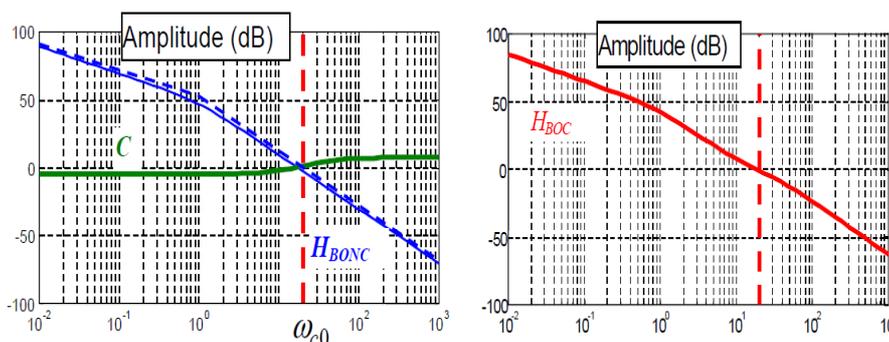
$$F(p) = \frac{K}{p(1+\tau p)}$$

Corrigé par un correcteur à avance de phase de fonction de transfert

$$C(p) = \frac{1+aTp}{1+Tp}$$

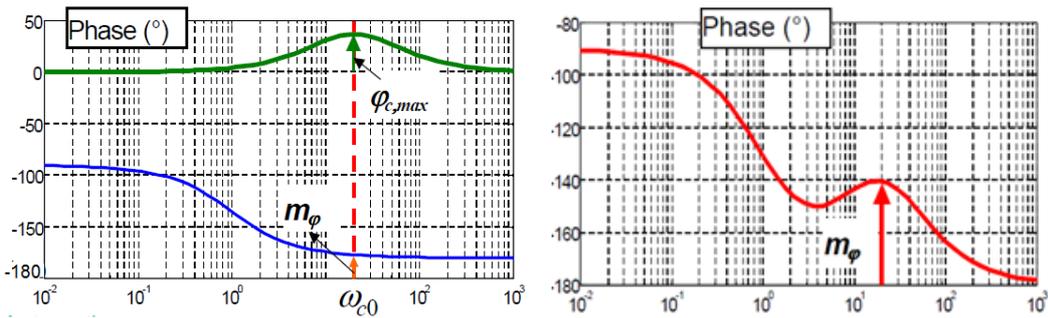
La fonction de transfert de la boucle ouverte est :

$$G(p) = C(p)F(p) = \frac{1+aTp}{1+Tp} \frac{K}{p(1+\tau p)}$$



A gauche le tracé du gain en décibels du système non corrigé et du correcteur à droite le tracé du gain corrigé

D'après le tracé la valeur de ω_{c0} du système n'a pas été dégradée.



A gauche le tracé de la phase en degré du système non corrigée et du correcteur
A droite le tracé de la phase en degré du système corrigée

Le tracé de la phase illustre parfaitement l'augmentation de la marge de phase

VII-5.Stratégie de synthèse des correcteurs

Pour corriger et utiliser le correcteur adéquat au système à contrôler, il est nécessaire de tenir compte des étapes suivantes :

- 1- de faire l'analyse du système en identifiant ses performances dynamiques, en traçant la réponse fréquentielle.
- 2- Bien déchiffrer le cahier des charges pour traduire ses exigences en termes d'erreur, rapidité, de marge de phase, de pulsation de coupure ω_{c0}
- 3- Choix de la structure du correcteur sera alors décidé compte tenu du cahier des charges et des caractéristiques du système
- 4- Calculer des paramètres du correcteur
- Vérifier les performances du système corrigé. Si le cahier des charges n'est pas satisfait, il faut revoir la structure du correcteur **retour à 3**
- 5-Réalisation de l'asservissement et tests

Correcteurs	Avantages	Inconvénients
P	Simplicité Meilleure précision	Risque d'instabilité si $K \gg 1$
PI	Simplicité Erreur statique nulle	Système parfois lent en BF

Avance de phase	Amélioration stabilité et rapidité	Sensibilité du système aux bruits
Retard de phase	Amélioration stabilité	
PID	Très utilisé en industrie Action PI + PD	Réglage des paramètres plus difficile

Exercice N°1 : Un système asservi composé d'un procédé défini par sa fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par :

$$F(p) = \frac{1}{(1+5p)^2}$$

Et d'un correcteur à déterminer.

Le cahier des charges spécifie que le système asservi doit posséder les propriétés suivantes :

Une erreur de position nulle ;

Une bande passante au moins égale à 0.8 rd/s.

De manière à obtenir les marges désirées, on choisit d'utiliser un correcteur de type P.I

Calculer alors ses paramètres.

Exercice N°2 : Soit un système décrit par sa fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{2}{(1+Tp)^2}$$

On veut asservir ce système en imposant un cahier des charges comme suit:

- Erreur statique de 5%
- Marge de phase de 60° avec une bande passante $[0 \text{ } \omega_c 0]$

1- Calculer la marge de phase de ce système

2- Calculer l'erreur statique.

3- En comparant les résultats obtenus avec les exigences du cahier des charges un correcteur à retard de phase est préconisé, calculer ses paramètres et donner sa fonction de transfert.

Exercice N°3 : Un système asservi est composé d'un procédé de fonction de transfert

$$G(p) = \frac{1}{p(1+5p)}$$

1- On insère un correcteur $C(p) = K$ Calculer la pulsation de coupure à 0 dB de $C(p) \cdot G(p)$ quand $K = 1$. Cette pulsation, notée ω_{c0} , mesure la rapidité du système asservi non corrigé.

2- Elaborer un régulateur $C(p) = Kp$ qui confère au système asservi les performances suivantes :

- Une marge de phase d'au moins 30°.
- Une erreur de position nulle en réponse à un échelon
- Une erreur de traînage ≤ 0.1 en réponse à une rampe

3- Ecrire la fonction de transfert d'un correcteur avance de phase en respectant le cahier des charges . Donner alors l'allure du diagramme de Bode du correcteur à avance de phase

Exercice N°4: Correction PID

Un système asservi est composé d'un procédé de fonction de transfert

$$G(p) = \frac{1}{(1+5p)^2}$$

et d'un régulateur $C(p)$ à déterminer.

On convient de mesurer la rapidité du système asservi par la pulsation de coupure à 0 dB de $C(p) G(p)$. Le cahier des charges spécifie que le système asservi doit posséder les propriétés suivantes :

- Une erreur de position nulle ;
- Une marge de phase au moins égale à 45°;
- Une bande passante au moins égale à 0.8 rd/s.

Déterminer K de manière à obtenir la pulsation de coupure voulue. Ce correcteur est-il satisfaisant ?

2- De manière à obtenir les marges désirées, on choisit d'utiliser un correcteur de type P.I.D. En conservant la valeur de T_i précédente, déterminer le paramètre T_d de manière à répondre au cahier des charges.

ANNEXE I

TABLE DE TRANSFORMEES DE LAPLACE

(à utiliser pour l'étude des asservissements continus)

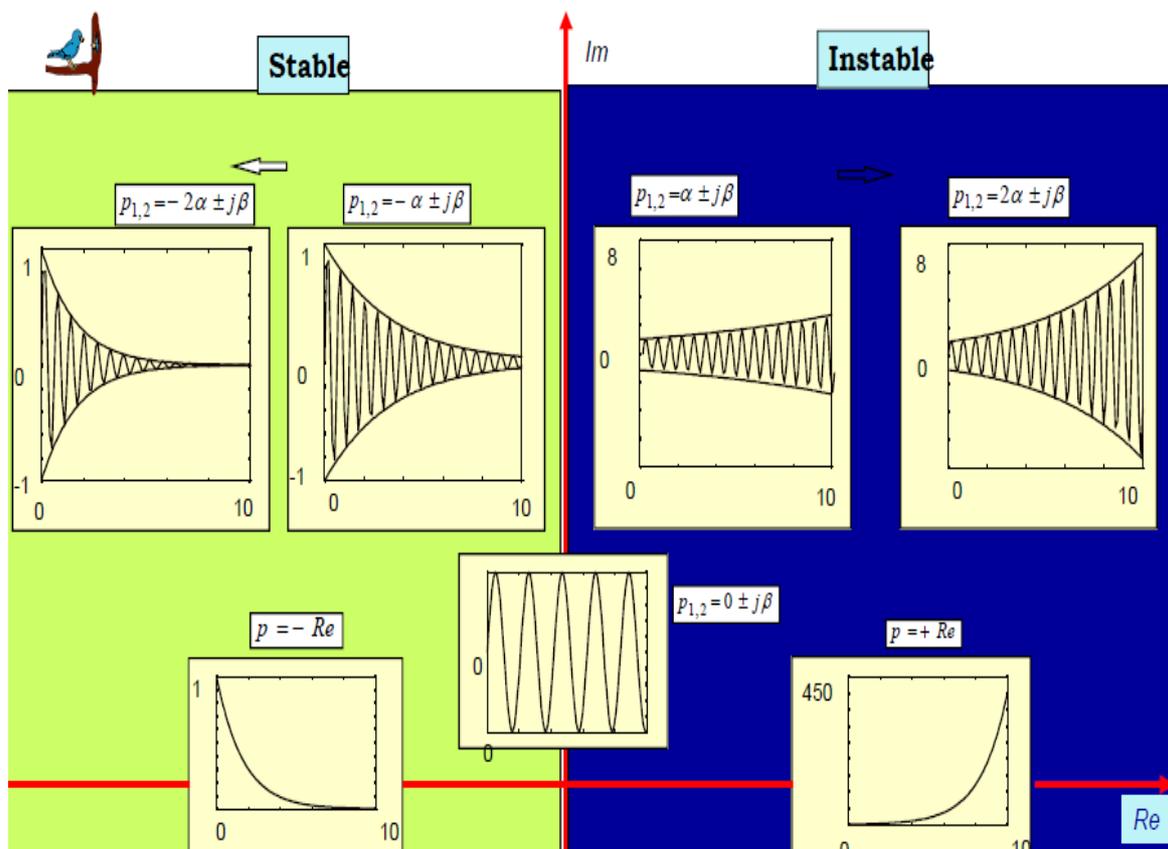
F(p)	f(t) = L ⁻¹ [F(p)]	F(p)	f(t) = L ⁻¹ [F(p)]
1	$\delta(t)$ Impulsion de Dirac	$\frac{1}{p^2(1+\tau p)}$	$t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{1}{p}$	u(t) Echelon unitaire	$\frac{1}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$	$\frac{e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_1 - \tau_2}$
e^{-Tp}	$\delta(t - T)$ impulsion retardée	$\frac{1}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$	$1 - \frac{\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_1 - \tau_2}$
$\frac{e^{-Tp}}{p}$	u(t - T) Echelon retardé	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	sin(ωt)
$\frac{1}{p^2}$	t.u(t) rampe unitaire	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	cos(ωt)
$\frac{1}{p^n}$ n entier	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{p \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{p^2 + \omega^2}$	sin($\omega t + \varphi$)
$\frac{1}{1+\tau p}$	$\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{p \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{p^2 + \omega^2}$	cos($\omega t + \varphi$)
$\frac{1}{(1+\tau p)^2}$	$\frac{1}{\tau^2} t e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1}{p(p^2 + \omega^2)}$	$\frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega^2}$
$\frac{1}{(1+\tau p)^n}$	$\frac{1}{\tau^n (n-1)!} t^{n-1} e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{p + z \omega_0}{\omega_0^2 + 2z \omega_0 p + p^2}$	$e^{-z \omega_0 t} \cos(\omega_p t)$ avec $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1-z^2}$
$\frac{1}{p(1+\tau p)}$	$1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$	$\frac{\omega_0}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z \omega_0 t} \sin(\omega_p t)$
$\frac{1}{p(1+\tau p)^2}$	$1 - (1 + \frac{t}{\tau}) e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1}{p(1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2)}$	$1 - \frac{\omega_0}{\omega_p} e^{-z \omega_0 t} \sin(\omega_p t + \psi)$ avec $\psi = \arccos z$

Remarque: Il est sous-entendu que toutes les fonctions du temps f(t) sont multipliées par u(t), c'est-à-dire qu'elles sont nulles avant l'instant initial t = 0.

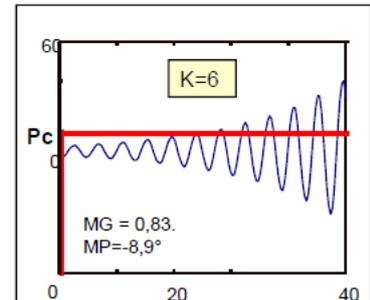
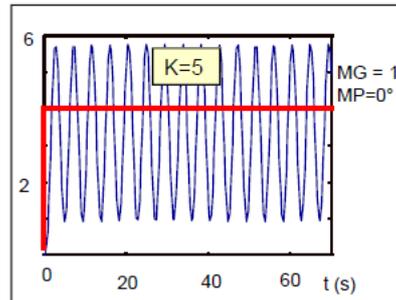
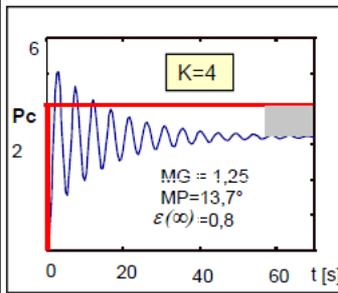
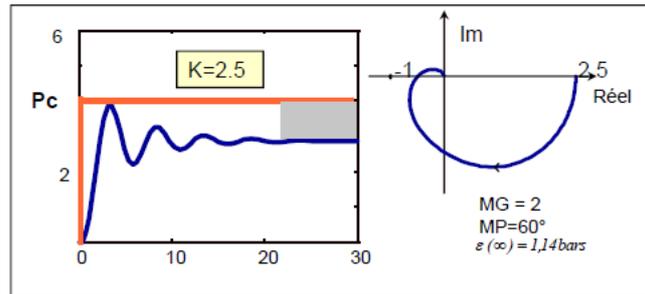
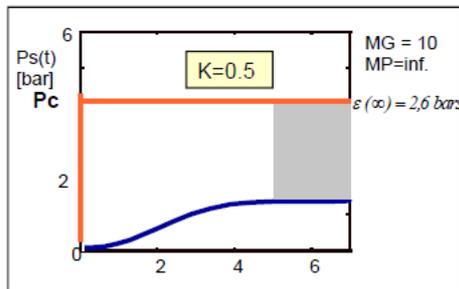
<p>Si $a^2 > b^2$: $\frac{1}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$</p> <p>avec $\begin{cases} p_1 = -a + \sqrt{a^2 - b^2} \\ p_2 = -a - \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$</p> <p>Si $a^2 = b^2$: $t.e^{-at}$</p> <p>Si $a^2 < b^2$: $\frac{1}{w}.e^{-at}.\sin wt$ avec $w = \sqrt{b^2 - a^2}$</p>	$\frac{1}{p^2 + 2ap + b^2}$
--	-----------------------------

ANNEXE II

Influence de la position des pôles sur la dynamique du système



Influence du gain sur la précision et la stabilité (simulation sur Matlab-Simulink)



ANNEXE III

👉 Comment choisir le cahier des charges

- Le point de départ de n'importe quel projet est le cahier de charge. Pour un système de régulation, les spécifications restent souvent vagues en raison surtout de la grande diversité de problèmes de régulation. Les critères qualitatifs à imposer dépendent d'abord de la nature du processus à régler. A titre d'exemple, on ne peut imposer aveuglément un processus transitoire rapide ou un taux d'amortissement de 0,75 pour n'importe quel système. En effet l'asservissement d'un ascenseur (qui nécessite un confort pour les passagers) ne tolère pas par exemple d'accélération. Les dépassements de la pression régulée dans un réacteur nucléaire ne doivent pas atteindre les seuils limites de tarage des soupapes de sécurité etc...

ANNEXE IV

► Trigonométrie

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
- $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$
- $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\tan(\pi + x) = \tan x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$
- $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\tan(-x) = -\tan x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\tan(\pi - x) = -\tan x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$
- $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$
- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
- $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$
- $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$
- $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$

Bibliographie

-Cours de régulation, Eric Magorotto, Département de Génie électrique et procédés. Université de Caen 2004-2005.

-Système Linéaires Continus, Dr GUENOUNOU Ouahid, Maître de conférences B 2013-2014 Département de Génie électrique Université A.MIRA Bédjaia.

-Automatique des systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, Représentation d'état, Cours et exercices corrigés, Yves Granjon, Directeur de l'ENSEM Nancy 2010

- Automatique Corrections des Systèmes linéaires continus asservis, ASI INSA Rouen

-ASSERVISSEMENTS CONTINUS, Cours, Michel VERBEKEN, I.U.T. de Montluçon Département G.E.I.I.

-Les systèmes Linéaires Continus, Mohamed DAMMAK (Assistant technologue GEII) Maher CHAABENE (Maître assistant GEII), Institut Supérieur des études Technologiques de Sfax

-AUTOMATIQUE. Continue et discrète, Pr Belkacem Ould Bouamama , Directeur de recherche à poltech'Lille, Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et signal, Polytech Lille