



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة وهران 2 محمد بن احمد
Université Oran 2 Mohamed Ben Ahmed

معهد الصيانة والأمن الصناعي
Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle

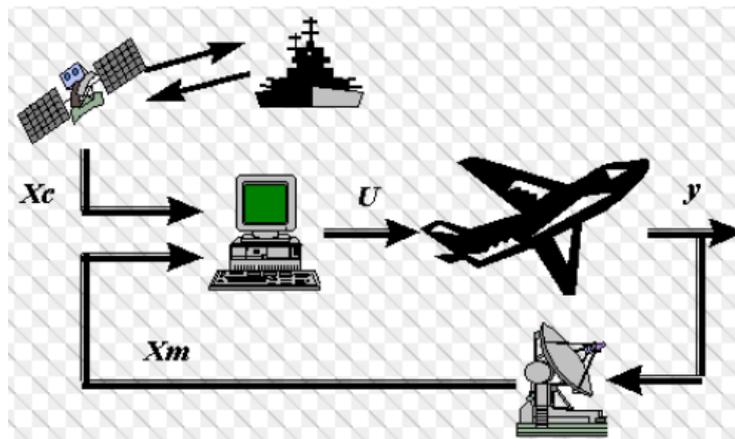
Département de maintenance en instrumentation

Polycopié de cours

Asservissement

Dr. MEKKI Ibrahim El Khalil, MCA

2^{ème} année Génie Industriel, MCIL



Filière /MCIL	Génie Industriel / formation MCIL : Maintenance de l'Automatisme et de l'Instrumentation					
Semestre	4					
Matière	Asservissement					
Crédits	5		Coefficient		3	
Volume horaire	Cours	1h30	TD	1h30	TP	1h30
Mode d'évaluation	Continu : 40% Examen : 60%					

Objectifs de l'enseignement:

Reconnaître les principales techniques de régulation des systèmes mécaniques et les composants mis en œuvre.

Connaissances préalables recommandées: Mathématiques, méthodes numériques.

Contenu de la matière

Chapitre 1 : Introduction au contrôle des systèmes

- Notions de systèmes.
- Classification des systèmes
 - Les systèmes linéaires, systèmes invariants, systèmes à modèle déterministe, et systèmes asservis avec Commande en boucle ouverte et Commande en boucle fermée
 - Performance des systèmes asservis, notion de stabilité, de rapidité et de précision
- Exemple de contrôle moderne des systèmes.

Chapitre 2 : Modèles mathématiques des systèmes linéaires, notion de fonction de transfert

- Notion de signal
- Mise en équations des systèmes linéaires (Equations différentielles) et approximation linéaire des systèmes physiques
- Transformation de Laplace, Définitions et propriétés.
- Fonction de transfert des systèmes linéaires.

Chapitre 3 : Représentation graphiques des systèmes linéaires

- Notions, et schéma fonctionnel, boucle ouverte, boucle fermée
- Règles de simplification des schémas fonctionnels

Chapitre 4 : Etudes temporelle des systèmes à temps continu

- Etude temporelle d'un système de premier ordre
 - Réponse impulsionnelle, Réponse indicielle, Réponse à une rampe.
- Etude temporelle d'un système du second ordre
 - Réponse impulsionnelle, Réponse indicielle.

Chapitre 5 : Etude harmonique des systèmes à temps continu

- Représentation de Bode
- Représentation de Nyquist
- Représentation de Black Nichols
- Interprétation dans le plan complexe
- Abaque de Black

TP Asservissement

Contenu de la matière:

- Prévoir quelques expériences en relation avec la l'asservissement sous forme de simulation.

Avant-propos

Avant-propos

Ce support pédagogique consacré à l'asservissement donne les éléments nécessaires à la compréhension des systèmes asservis et la régulation. Il s'adresse aux étudiants de la deuxième année licence académique de spécialité : Génie industriel (L2 GI) du département de maintenance en instrumentation (M. IT), en semestre quatre (S4), selon le programme défini par le code de la matière UEF 2.4/1 de l'arrêté ministériel.

Le polycopié est devisé en cinq chapitres :

- **Le premier chapitre** est un aperçu sur le contrôle des systèmes, il inclut les notions et la classification des systèmes essentiels que l'étudiant doit connaître avec les performances des systèmes asservis.
- **Le deuxième chapitre** est consacré à des modèles mathématiques des systèmes linéaires, notion de fonction de transfert : notion de signal, mise en équations des systèmes linéaires (Equations différentielles) et approximation linéaire des systèmes physiques, définitions et propriétés de la transformée de Laplace, fonction de transfert des systèmes linéaires.
- **Le troisième chapitre** : on trouve les représentations graphiques des systèmes linéaires : notions, et schéma fonctionnel, boucle ouverte, boucle fermée et les règles de simplification des schémas fonctionnels.
- **Le quatrième chapitre** : concerne l'étude temporelle des systèmes à temps continu d'un système de premier et du second ordre : la réponse impulsionnelle, indicielle, et à une rampe.
- Enfin, **le cinquième chapitre** est destiné à l'étude harmonique des systèmes à temps continu d'un système de premier et du second ordre avec les représentations suivantes : Bode, Nyquist, Black Nichols et l'abaque de Black.

- **Objectifs de l'enseignement**: Permettre aux étudiants d'apprendre et de connaître les principales techniques de l'asservissement ainsi que la régulation des systèmes électriques, mécaniques et les composants mis en œuvre.

Connaissances préalables recommandées: Mathématiques, méthodes numériques.

Niveau: Licence 2 - département de maintenance en instrumentation (M. IT).

Spécialité: Génie Industriel (GI).

Enseignement : en Français.

Mots clefs : Asservissement, régulation, performances, système de premier et de deuxième ordre, transformée de Laplace, réponse temporelle, la réponse fréquentielle.

Table des matières

Avant-propos	i
Table des matières	iii
Liste des tableaux	iv
Liste des figures	iv
Chapitre I : Introduction au contrôle des systèmes	
I.1. Notions d'un système	02
I.1.1 Définition d'un système	02
I.1.2 Système automatique	02
I.1.3 Système asservi	02
I.2 Classification des systèmes	02
I.2.1 Système linéaire	02
I.2.2 Système continu	03
I.2.3 Système invariant	04
I.2.4 Système à modèle déterministe	04
I.2.5 Système non linéaire	04
I.2.6 Système monovariable	04
I.2.7 Système multivariable	04
I.3 Notion d'un système de commande	05
I.3.1 La commande en boucle ouverte / fermée	06
I.3.2 Constituants d'une chaîne de régulation	06
I.3.3 Les différents modes de commande	07
I.3.4 Les étapes à suivre pour réaliser une chaîne de régulation	07
I.4 Les performances d'un système asservi	07
I.4.1 En régime permanent	07
a) La précision	07
b) La stabilité	08
I.4.2 En régime transitoire	09
a) La rapidité	09
b) Dépassements	09
I.5 Exemple de contrôle moderne des systèmes	10
Chapitre II : Modèles mathématiques des systèmes linéaires, notion de fonction de transfert	
II.1 Signaux.....	12
II.1.1 Notion de signal	12
II.1.2 Signaux de commande	12
II.1.3 Signaux tests	12
II.2 Mise en équations des systèmes linéaires (équations différentielles)	13
II.3 Approximation linéaire des systèmes physiques	14
II.4 La transformation de Laplace.....	16
II.4.1 Définition de la transformée de Laplace d'une fonction	16
II.4.2 Propriétés fondamentales de la transformée de Laplace	16
II.4.3 Transformée de Laplace inverse	17

II.5 Fonction de transfert des systèmes linéaires	20
II.6 Exemples des fonctions de transferts	20
II.7 Exemple d'application	23
Chapitre III :	Représentations graphiques des systèmes linéaires
III.1 Représentations graphiques des systèmes linéaires	25
III.2 Notion et schéma fonctionnel	25
III.3. Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO)	25
III.4 Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF)	26
III.5 Réduction des schémas fonctionnels	27
III.6 La procédure à suivre pour simplifier et réduire un schéma fonctionnel	30
III.7 Exemples d'applications	30
III.8 Graphe de fluence (de transfert)	33
III.8.1 Définitions et propriétés d'un graphe de fluence	34
III.8.2 Réalisation des graphes	35
III.8.3 Règle de Mason	36
III.8.4 Exemple d'application	37
Chapitre IV :	Etudes temporelles des systèmes à temps continu
IV.1 Réponse d'un système asservi aux entrées canoniques	39
IV.2 Etude temporelle des systèmes	39
IV.2.1 Etude temporelle d'un système de premier ordre	39
a) Réponse indicielle (réponse à un échelon)	40
b) Réponse impulsionnelle (réponse à un Dirac)	41
c) Réponse à une rampe	41
IV.2.2 Etude temporelle d'un système du second ordre	42
a) Réponse indicielle d'un système du second ordre	45
b) Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre	45
Chapitre V :	Etude harmonique des systèmes à temps continu
V.1 Réponse fréquentielle	48
V.2 Interprétation dans le plan complexe	49
V.3 Représentations graphiques des réponses fréquentielles	49
V.3.1 Diagramme de Bode	49
V.3.1.1 Diagramme asymptotique	49
V.3.1.2 Bande passante	50
V.3.1.3 Exemples d'applications	50
a) Système de 1 ^{er} ordre	50
b) Système de 2 ^{ème} ordre	51
V.3.1.4 Diagramme de Bode généralisé	53
V.3.2 Diagramme de Nyquist	54
V.3.2.1 Exemples d'applications	54
a) Système de 1 ^{er} ordre	54
b) Système de 2 ^{ème} ordre	55
V.3.2.2 Diagramme de Nyquist généralisé	56

V.3.3 Le diagramme de Black-Nichols	57
V.3.3.1 Exemples d'applications	57
a) Système de 1 ^{er} ordre	57
b) Système de 2 ^{ème} ordre	58
V.3.3.2 Diagramme de Black-Nichols généralisé	59
V.3.4 Abaque de Black–Nichols	59
V.3.4.1 Interprétation géométrique du passage de la boucle ouverte à la boucle fermée.....	59
V.3.4.2 Analyse des résonances	61
V.3.4.3 Bande passante en boucle fermée	62
Travaux pratiques	
TP N°=1 Système de premier ordre	64
TP N°=2 Système de deuxième ordre	65
TP N°=3 Réduction des schémas fonctionnels	66
Références bibliographiques	68

Liste des tableaux

Tableau II.1: Les différents signaux utilisés pour commander un système 12
Tableau II.2 : Table de la transformée de Laplace 17
Tableau III.1: Les quatre schémas élémentaires utilisés dans la représentation fonctionnelle 25
Tableau III.2: Transformations élémentaires des graphes de Mason 35

Liste des figures

Figure I.1 : Représente le système 02
Figure I.2 : Représente différents systèmes à réguler 02
Figure I.3 : Représente le circuit résistance capacité (RC) 03
Figure I.4 : Représente l'application du principe de proportionnalité sur un système 03
Figure I.5 : Représente l'application du principe de superposition sur un système 03
Figure I.6 : Représente le système continu et discret 03
Figure I.7 : Représente le système invariant 04
Figure I.8 : Linéarisation d'un système non linéaire au voisinage d'un point 04
Figure I.9 : Représente les systèmes SISO et MIMO 05
Figure I.10 : Représente la notion générale d'un système de commande 05
Figure I.11 : Représente la notion générale d'un système de commande pour un four 05
Figure I.12 : Exemple d'un système en boucle ouverte 06
Figure I.13 : Exemple d'un système en boucle fermée 06
Figure I.14: Représente le schéma fonctionnel d'un système asservi 07
Figure I.15 : Représente des exemples de précision pour un système 08
Figure I.16 : Représente l'erreur statique et l'erreur de trainage 08
Figure I.17 : Représente des exemples de stabilités pour un système 08
Figure I.18 : Représente des exemples de rapidité pour un système 09
Figure I.19 : Représente des exemples de dépassements pour un système 09
Figure I.20 : Représente différentes performances possibles pour un système..... 10

Figure II.1 : L'analyse du comportement d'un système..... 12
Figure II.2: La procédure de recherche d'un signal de sortie $s(t)$ 14
Figure II.3: Un exemple de linéarisation d'une fonction 14
Figure II.4: La Fonction linéarisée 15
Figure II.5: L'échelon unitaire 16
Figure II.6: Schéma bloc dans le domaine de Laplace 20
Figure II.7: Circuit RC 21
Figure II.8: Circuit RLC 21
Figure II.9: Système mécanique 22

Figure III.1 : Le calcul de la FTBO	26
Figure III.2 : Schéma bloc d'un asservissement en boucle fermée	26
Figure III.3 : Association de deux éléments en série	27
Figure III.4 : Association de deux blocs en parallèle	27
Figure III.5 : Retrait d'un élément d'une chaîne d'action	27
Figure III.6 : Elimination d'une boucle de retour	27
Figure III.7 : Retrait d'un élément d'une boucle de retour	28
Figure III.8 : Redisposition des comparateurs.....	28
Figure III.9 : Permutation des points de prélèvement (capteurs)	28
Figure III.10 : Transformation d'un comparateur en un sommateur	29
Figure III.11 : Déplacement d'un comparateur en amont d'un élément	29
Figure III.12 : Déplacement d'un comparateur en aval d'un élément	29
Figure III.13 : Déplacement d'un point de dérivation en amont d'un élément	29
Figure III.14 : Déplacement d'un point de dérivation en aval d'un élément	29
Figure III.15 : Premier exemple de schéma fonctionnel à une seule entrée	30
Figure III.16 : Deuxième exemple de schéma fonctionnel à deux entrées	30
Figure III.17 : Etape 1 de la réduction du schéma fonctionnel	31
Figure III.18 : Etape 2 de la réduction du schéma fonctionnel	31
Figure III.19 : Etape 3 de la réduction du schéma fonctionnel	31
Figure III.20 : Etape 4 de la réduction du schéma fonctionnel	32
Figure III.21 : Etape 5 de la réduction du schéma fonctionnel	32
Figure III.22 : Etape 6 de la réduction du schéma fonctionnel	32
Figure III.23 : La fonction de transfert après réduction du schéma fonctionnel	32
Figure III.24 : Schéma fonctionnel avec $W(p)=0$	33
Figure III.25 : Schéma fonctionnel avec $E(p)=0$	33
Figure III.26 : Graphe de fluence	33
Figure III.27 : Nœud associé à la variable X_1	34
Figure III.28 : Le nœud de source et de puits	34
Figure III.29 : Arc de transmittance G_1	34
Figure III.30 : Chemin X_1 à X_4	35
Figure III.31 : Exemple d'un graphe de fluence à réduire	37
Figure IV.1 : Réponse indicielle d'un système de premier ordre	40
Figure IV.2 : Réponse impulsionnelle d'un système de premier ordre	41
Figure IV.3 : Réponse à une rampe pour un système de premier ordre	42
Figure IV.4 : Réponse indicielle d'un système de deuxième ordre à $\xi > 1$	43
Figure IV.5 : Réponse indicielle d'un système de deuxième ordre à $\xi < 1$	44
Figure IV.6 : Réponse impulsionnelle d'un système de second ordre ($\xi > 1$)	45
Figure IV.7 : Réponse impulsionnelle d'un système de second ordre ($0 < \xi < 1$)	46

Figure V.1: La réponse fréquentielle	48
Figure V.2: Plan complexe	49
Figure V.3: Diagramme de Bode d'un système de premier ordre	51
Figure V.4: Diagramme de Bode d'un système de second ordre	52
Figure V.5: Diagrammes de Bode asymptotiques des fonctions élémentaires	53
Figure V.6: Définition du diagramme de Nyquist	54
Figure V.7: Diagramme de Nyquist de 1er ordre	55
Figure V.8: Diagramme de Nyquist de 2ème ordre	56
Figure V.9: Diagramme de Nyquist généralisé	56
Figure V.10: Diagramme de Black-Nichols de 1er ordre	57
Figure V.11: Diagramme de Black-Nichols du 2ème ordre	58
Figure V.12: Le cas du retour unitaire	59
Figure V.13: Les courbes isomodules et isophases de l'abaque de Black-Nichols	60
Figure V.14: L'analyse de la résonance	61
Figure V.15: Le module en dB de la FTBF	61
Figure V.16: La bande passante à $-\alpha$ dB de la BF	62
Figure V.17: La détermination de la bande passante à $-\alpha$ dB en BF	62

Chapitre I : Introduction au contrôle des systèmes

I.1 Notions de système

I.1.1 Définition d'un système

Un système est un ensemble de composants interférant collectivement afin de réaliser des fonctions déterminées. Il est symbolisé par un schéma bloc possédant des entrées d'une ou plusieurs grandeurs d'entrées appelées commandes et une ou plusieurs grandeurs de sorties qui doivent être maintenues de la valeur désirée. Les autres entrées qui agissent et modifient d'une façon non prévisible sur le système sont appelées des perturbations.

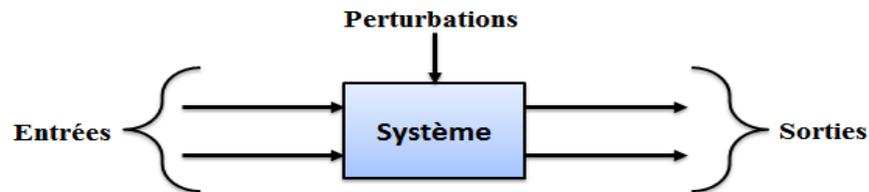


Figure I.1 : Représente un système

I.1.2 Système automatique

On a souvent besoin que des grandeurs : physiques, chimiques subissant des variations précises (par exemple : on veut que la grandeur reste constante).

Exemples:

- Niveau de liquide dans un réservoir : le but est de garder le niveau de liquide constant en toute situation.
- Vitesse d'un moteur : le but est de garder la vitesse constante quelle que soit la charge.
- Température d'un four : le but est de garder la température constante.

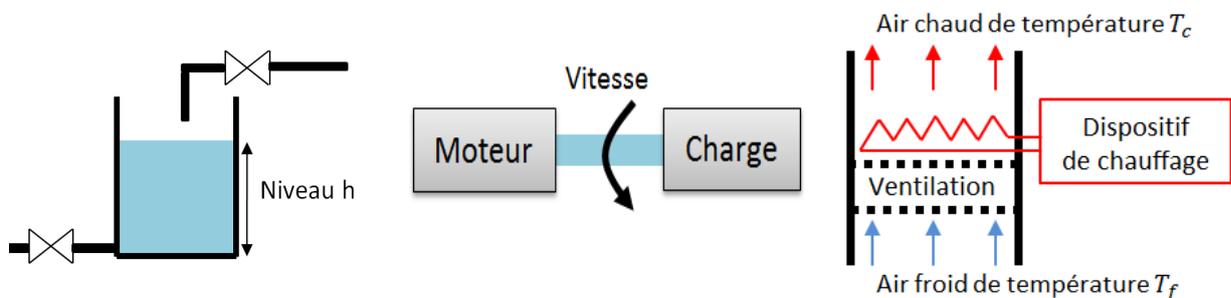


Figure I.2 : Représente différents systèmes à réguler

I.1.3 Système asservi

Un des objectifs d'un système asservi est de remplacer l'homme dans une tâche de régulation, de contrôle d'une grandeur, le régulateur ajuste alors automatiquement la commande afin de maintenir la grandeur de sortie à la valeur désirée (entrée) selon le cahier des charges.

I.2 Classification des systèmes

I.2.1 Système linéaire

Un système est dit linéaire lorsque ses grandeurs d'entrée et de sortie peuvent se mettre sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles à coefficients constants.

Nous avons l'exemple d'un circuit RC représenté par l'équation suivante :

$$e(t) = RC \frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t)$$

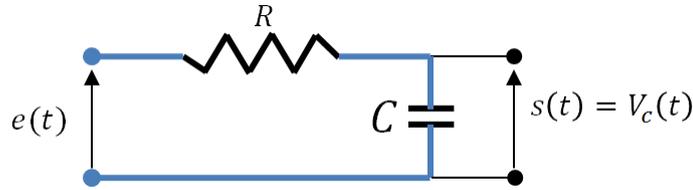


Figure I.3 : Représente le circuit résistance capacité (RC)

- **Principe de proportionnalité** : la sortie $s(t)$ est proportionnelle à l'entrée $e(t)$ alors $\lambda \times s(t)$ est la réponse de $\lambda \times e(t)$.



Figure I.4 : Représente l'application du principe de proportionnalité sur un système

- **Principe de superposition** : les sorties $s_1(t) + s_2(t)$ sont proportionnelles aux entrées $e_1 + e_2(t)$.

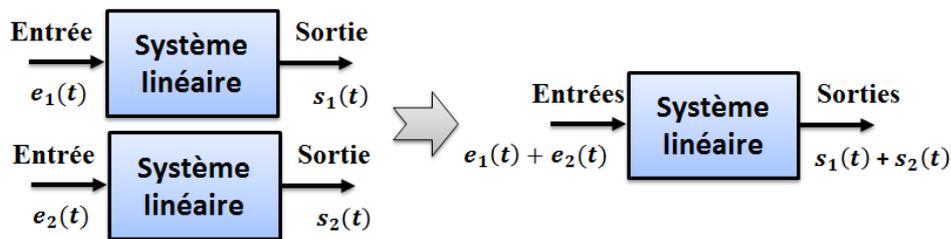


Figure I.5 : Représente l'application du principe de superposition sur un système

I.2.2 Système continu

Un système continu a les mêmes propriétés qu'une fonction continue. On peut définir à chaque instant de façon continue les valeurs des grandeurs physiques. On parle des systèmes analogiques. Un système discret est tout à fait le contraire d'un système continu, c'est une séquence d'actions dans le temps.

Dans les systèmes de commande modernes, l'information est traitée, le plus souvent, par des systèmes informatiques ce qui nécessite un échantillonnage des signaux. On parle dans ce cas de systèmes échantillonnés ou discrets.

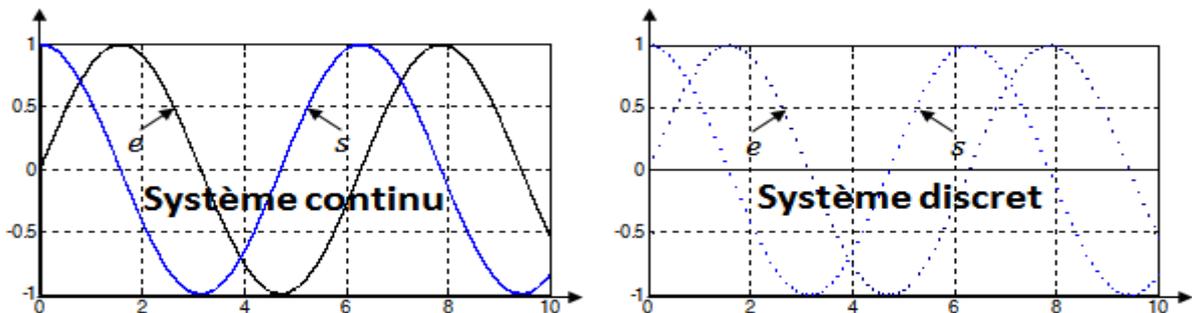


Figure I.6 : Représente le système continu et discret

I.2.3 Système invariant

Un système est invariant (système stationnaire) si les caractéristiques (masse, dimensions, résistance,...) du système ne changent pas au cours du temps (le système ne vieillit pas).

Par contre, pour un système variant dans le temps, les paramètres varient dans le temps. Par exemple dans un système de contrôle de véhicule spatial, dans lequel la masse diminue au fur et à mesure que le carburant est consommé pendant le vol.

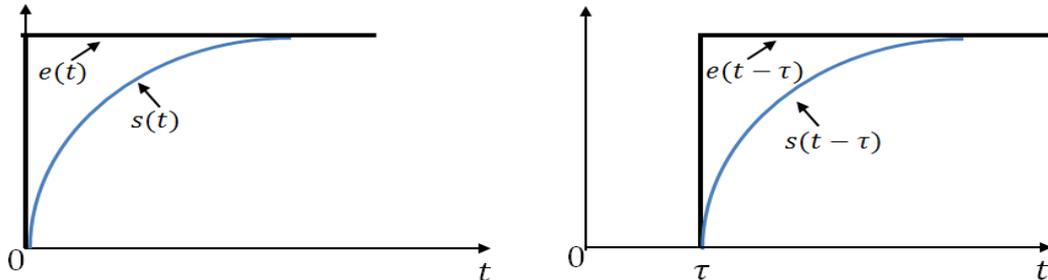


Figure I.7 : Représente le système invariant

- Causalité

Un **système causal**, La réponse temporelle du système ne peut anticiper son entrée, cela signifie qu'il est nul pour $t < 0$.

I.2.4 Système à modèle déterministe

Un système de contrôle est déterministe si la réponse à l'entrée est prévisible et reproductible. Sinon, le système de contrôle est stochastique.

I.2.5 Système non linéaire

La plupart des systèmes physiques ne sont pas linéaires, il est possible donc de linéariser un système non linéaire sur une plage de fonctionnement limité appelé point de fonctionnement.

À titre d'exemple deux équations mathématiques simples pour comprendre les relations entre les entrées et les sorties des systèmes linéaires et non linéaires.

Système linéaire : $y = Ax + b$; Système non linéaire : $y = x^3$

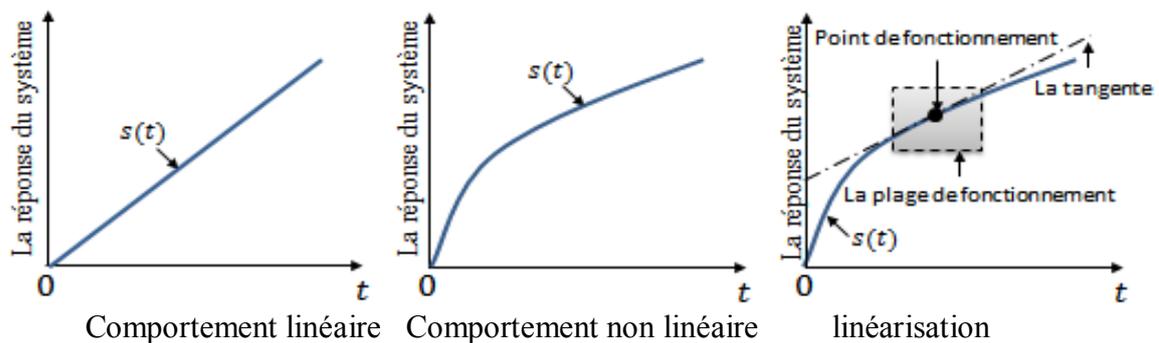


Figure I.8 : Linéarisation d'un système non linéaire au voisinage d'un point de fonctionnement

I.2.6 Système monovariante

Un système monovariante (**SISO**) possède une seule entrée et une seule sortie.

I.2.7 Système multivariante

Un système multivariante (**MIMO**) possède plusieurs entrées et/ou de sorties.

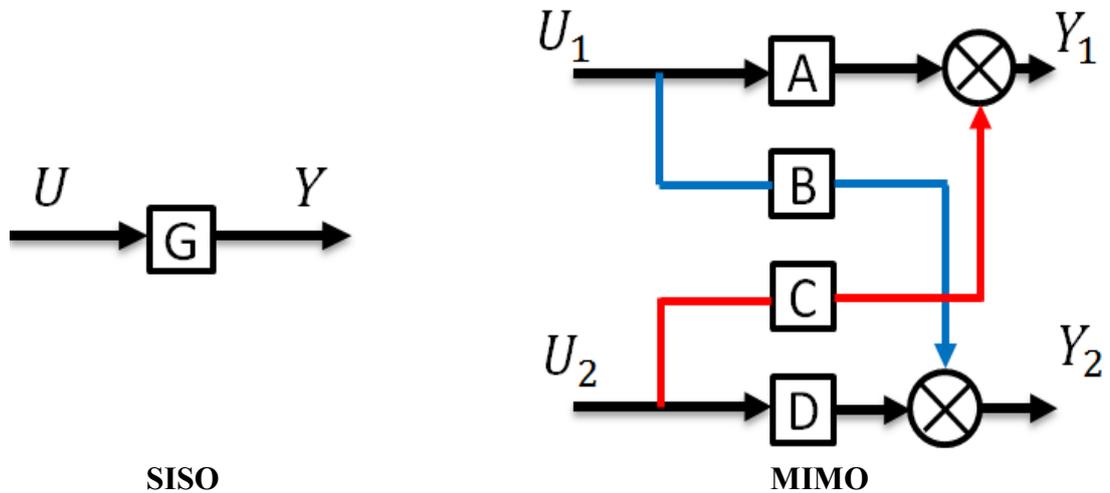


Figure I.9 : Représente les systèmes SISO et MIMO

I.3 Notion d'un système de commande

Un système de commande est un système dont la fonction principale est de commander une grandeur de sortie selon une consigne désirée.

Un système à commander : est le système qu'on veut commander (moteur, réacteur, ...).

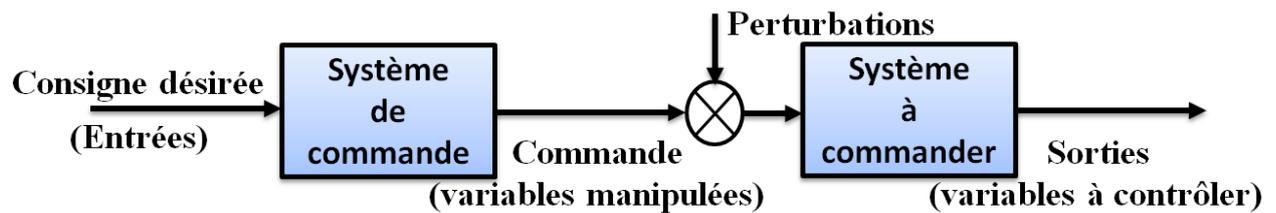


Figure I.10 : Représente la notion générale d'un système de commande

Exemple de contrôle de température d'un four :

- **La consigne désirée (entrée) :** est la température fixée par l'utilisateur : 100°C .
- **Système de commande :** la vanne de gaz combustible.
- **La commande (variables manipulées) :** débit du gaz combustible.
- **Perturbations :** ouverture de la porte de four, température extérieure.
- **La sortie (variable à contrôler) :** est la température réelle du four.

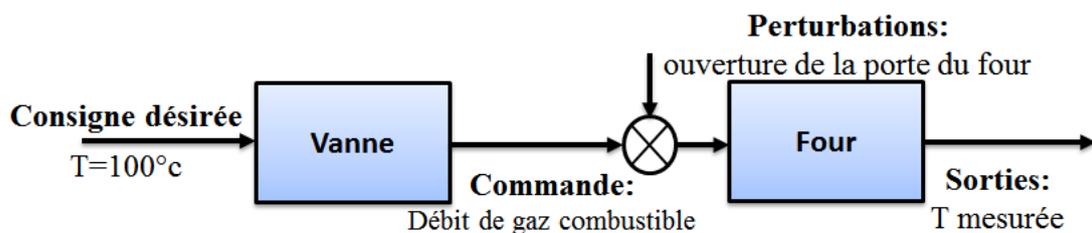


Figure I.11 : Représente la notion générale d'un système de commande pour un four

I.3.1 La commande en boucle ouverte / fermée

On distingue deux classes de systèmes de commande:

- **Système en boucle ouverte (chaîne directe)**

Dans la commande en boucle ouverte l'opérateur dans la salle de contrôle n'a pas d'information sur la sortie du système. Dans l'exemple du four, le signal de commande est indépendant du signal de sortie, car la température mesurée (sortie) du four n'est pas connue.

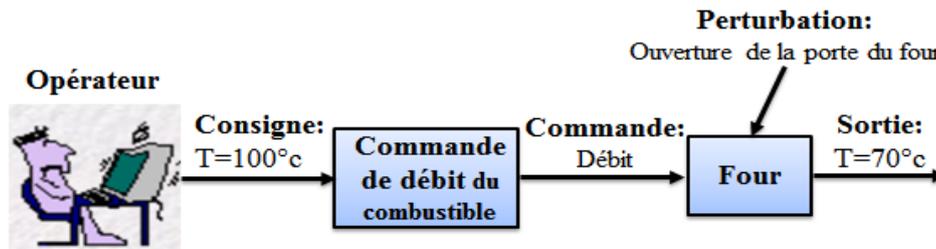


Figure I.12 : Exemple d'un système en boucle ouverte

- **Système en boucle fermée (chaîne de retour)**

En boucle fermée, l'opérateur a toutes les informations sur la sortie du système (température, pression, débit, PH,...).

Dans l'exemple du four ; la température mesurée du four est prélevée par un capteur de température 70°C, l'opérateur dans la salle de contrôle compare la consigne de 100°C et la mesure de 70°C.

Le signal d'erreur est de 30°C, alors que le signal de commande est lié au signal de sortie.

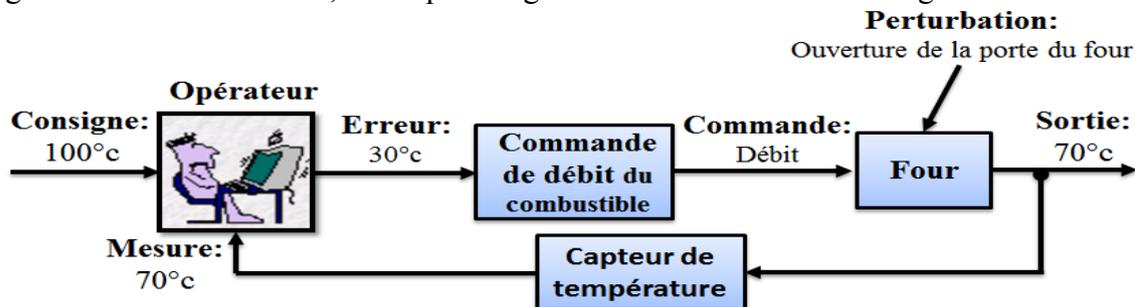


Figure I.13 : Exemple d'un système en boucle fermée

I.3.2 Les constituants d'une chaîne de régulation

On présente les constituants d'une chaîne de régulation par le schéma fonctionnel dans la Figure I.14.

- **Capteur** : Organe de mesure de la sortie du système. Il transforme la grandeur physique mesurée à une grandeur de type électrique ou pneumatique (capteur de température, de position, de vitesse, ...).

- **Comparateur (Détecteur d'erreur ou d'écart)** : Il Compare et détecte l'écart entre le signal de consigne et le signal envoyé par le capteur.

- **Actionneur** : Élément qui commande le système. Il distribue de l'énergie au système.

- **Correcteur** : Il envoie un signal de commande en fonction de l'erreur calculée par le comparateur. Il permet de réaliser le cahier de charges d'un système.

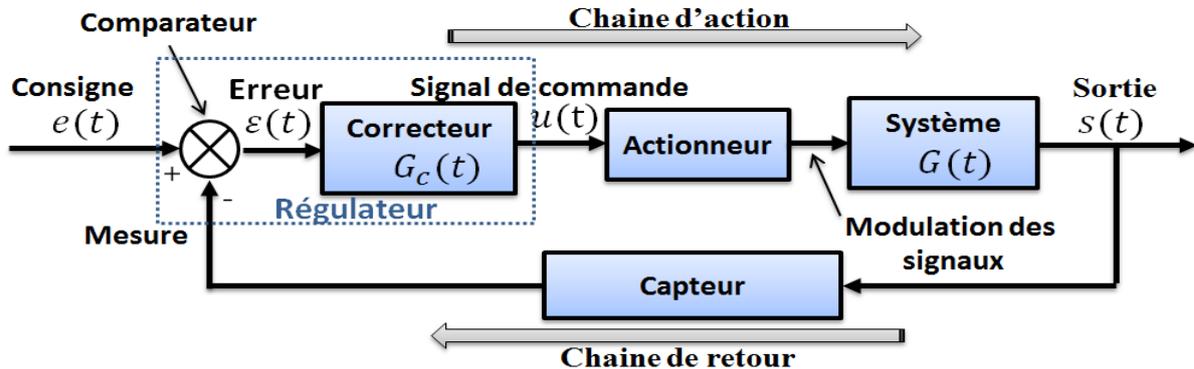


Figure I.14: Représente le schéma fonctionnel d'un système asservi

I.3.3 Les différents modes de commande

Deux fonctions sont possibles dans la commande :

- **Asservissement** : Un système asservi est un système dit suiveur, c'est la consigne qui varie. Exemple: commander un missile qui poursuit une cible.
- **Régulation** : Dans ce cas, la consigne est fixée et le système doit compenser l'effet des perturbations. Exemple: le réglage de la température dans un four.

I.3.4 Les étapes à suivre pour réaliser une chaîne de régulation

- ✓ **Analyser** : Le comportement du système qu'on veut commander,
- ✓ **Modéliser** : Le système par des équations mathématiques, décrit les relations entre les différentes grandeurs qui caractérisent son fonctionnement.
Le modèle peut être physique (en se basant sur les lois de la physique, de la chimie et de la mécanique) ou expérimental (ou de comportement) en se basant sur des observations et des expériences effectuées sur le processus.
- ✓ **Synthétiser le correcteur** : Est l'étape primordiale dans la conception d'un système de commande. Le choix du correcteur dépend des performances qu'on souhaite réalisées.
Tester, valider et mettre en œuvre le correcteur pour avoir si les performances réalisées ont été affectées lors de l'application du correcteur dans une boucle fermée.

I.4 Les performances d'un système asservi

Un système asservi est évalué par différents critères principaux de performances : précision, rapidité, amortissement et stabilité. La réponse peut être décomposée en deux parties :

I.4.1 En régime permanent

Le régime permanent correspond au moment où le signal de sortie est établi.

a) La précision

La grandeur de sortie doit être la plus proche de la consigne en régime permanent. Elle est mesurée par l'écart entre la sortie et la consigne, appelée erreur statique ou écart permanent ε_s .

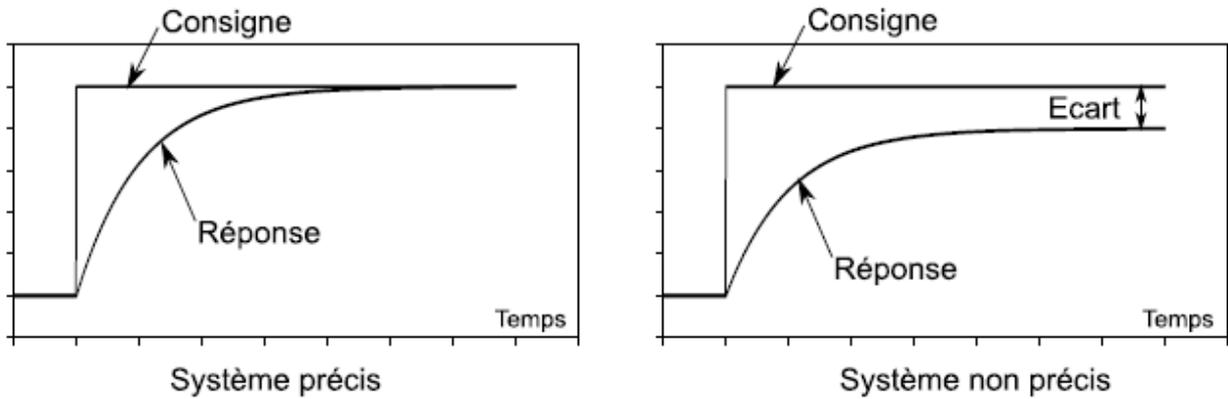


Figure I.15 : Représente des exemples de précision pour un système

Erreur de traînage ε_t , appelée aussi l'erreur de poursuite ou de vitesse : c'est l'erreur entre la sortie et une entrée de type rampe. Ce signal test permet de voir l'aptitude d'un système asservi et de pouvoir suivre une consigne variable dans le temps.

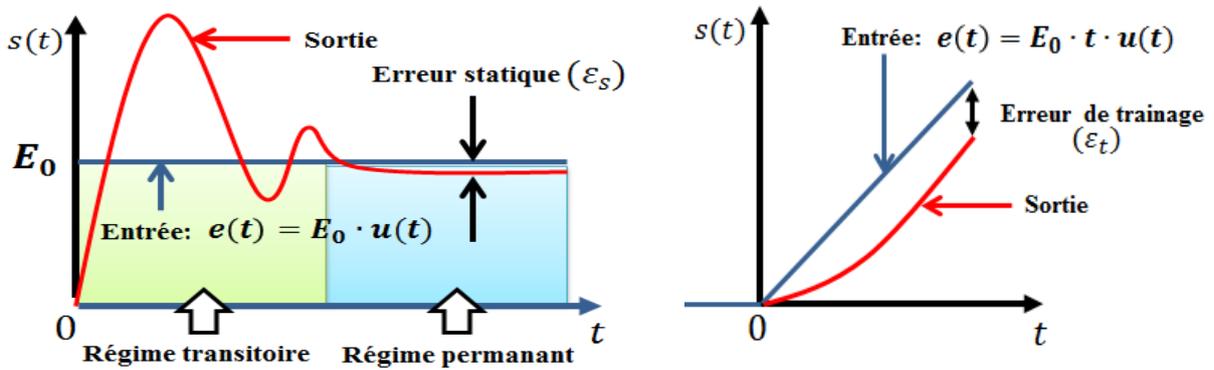


Figure I.16 : Représente l'erreur statique et l'erreur de traînage

b) La stabilité

Pour une consigne ou référence (entrée : $e(t)$) constante, la sortie $s(t)$ du système doit tendre vers une valeur constante lorsque $t \rightarrow +\infty$. Apparition de n'importe quelle perturbation doit être rejetée au cours du temps.

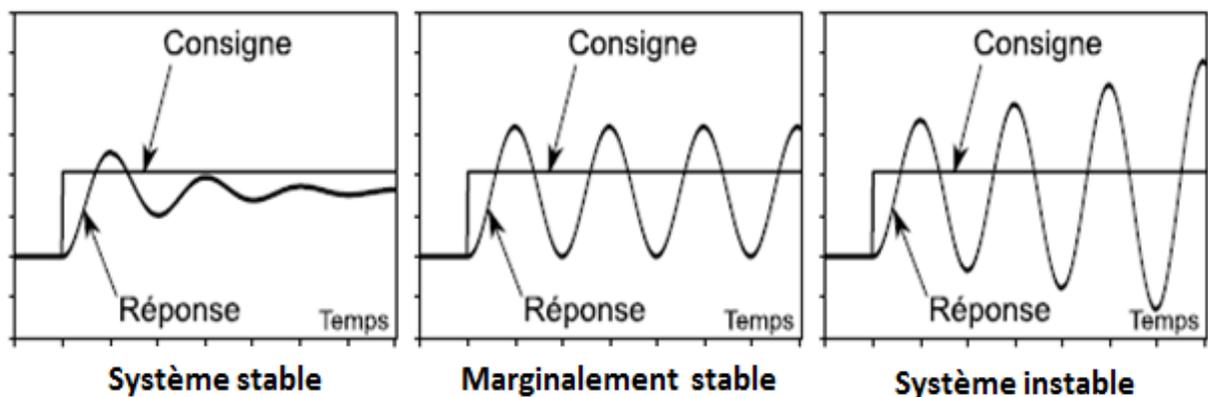


Figure I.17 : Représente des exemples de stabilité pour un système

I.4.2 En régime transitoire

a) La rapidité

Elle correspond au temps de réponse du système pour atteindre $\pm 5\%$ de la valeur finale (VF) de la consigne.

Dans le cas où la sortie du système dépasse la valeur de la consigne quelques instants autour de cette valeur.

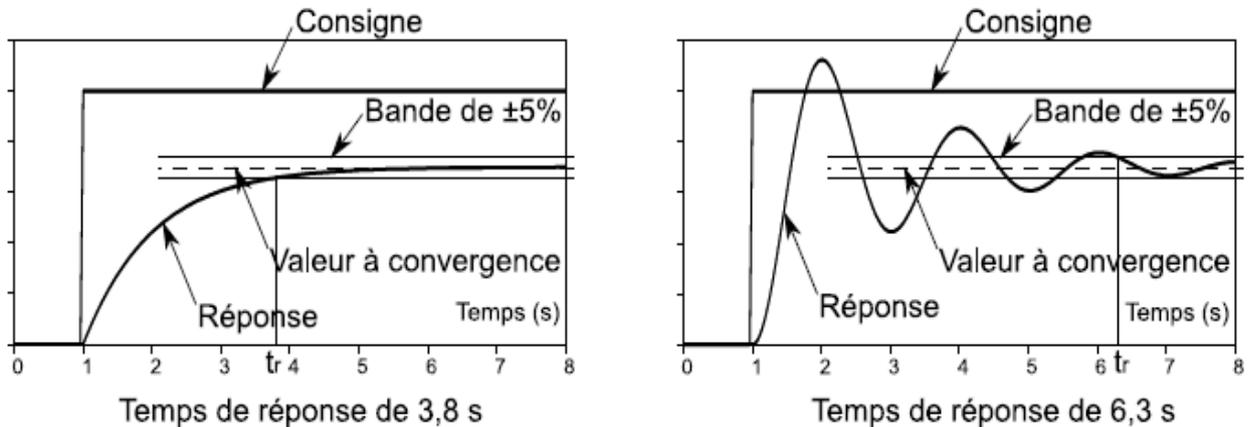


Figure I.18 : Représente des exemples de rapidité pour un système

b) Dépassements

La réponse d'un système présente des dépassements si elle dépasse la valeur de la consigne avant de converger.

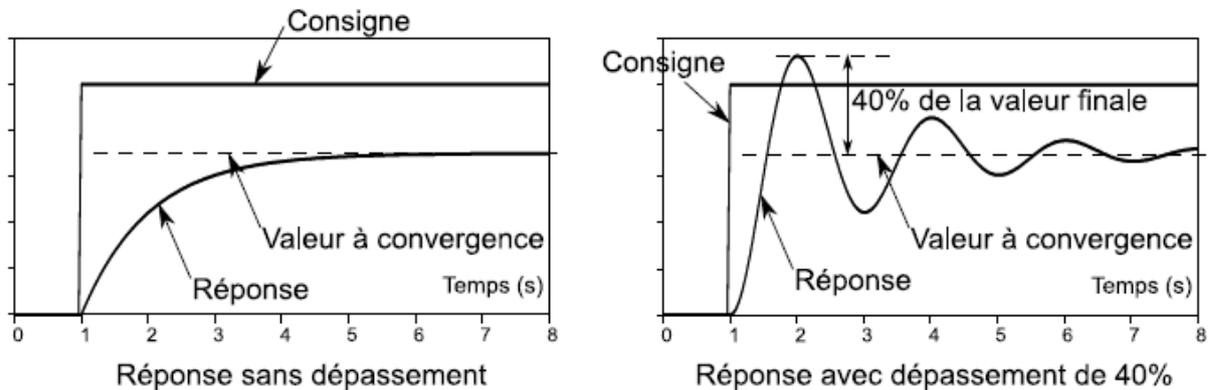


Figure I.19 : Représente des exemples sans et avec dépassement

Sur la Figure I.20, on peut voir toutes les performances d'un système asservi.

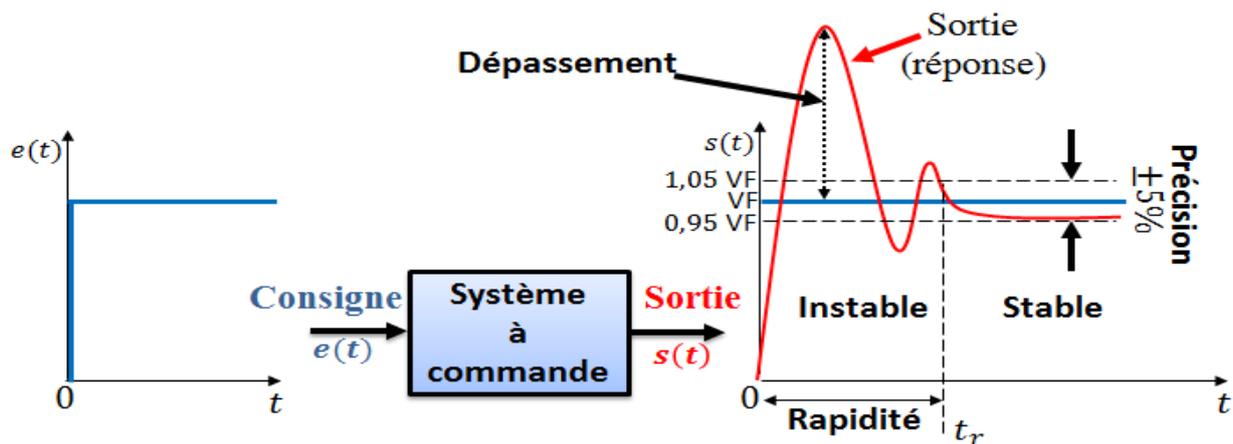


Figure I.20 : Représente différentes performances possibles pour un système

I.5 Exemple de contrôle moderne des systèmes

La théorie du contrôle moderne s'oppose à la théorie du contrôle classique. La première est applicable aux systèmes à entrées multiples et à sorties multiples, qui peuvent être linéaires ou non linéaires, invariant ou variant dans le temps, alors que la dernière ne s'applique qu'aux systèmes invariants dans le temps, linéaires, qui ont une seule entrée une seule sortie.

Le contrôle moderne des systèmes est une branche de l'ingénierie qui utilise des techniques mathématiques avancées pour concevoir des systèmes de contrôle pour des systèmes dynamiques complexes tels que les robots, les avions, les voitures, les centrales électriques, etc.

Voici quelques exemples de techniques couramment utilisées en contrôle moderne des systèmes :

- La commande par retour d'état (ou commande par rétroaction d'état)
- La commande prédictive
- La commande par optimisation convexe
- La commande adaptative
- La commande non linéaire
- La commande par intelligence artificielle

Chapitre II : Modèles mathématiques des systèmes linéaires, notion de fonction de transfert

II.1 Signaux

II.1.1 Notion de Signal

Le signal est une grandeur physique générée par un appareil ou traduite par un capteur (tension, température, débit, etc.) En pratique, un signal est une tension entre 0 et 5V ou un courant entre 0 et 20 mA.

Pour un système donné, on distingue :

➤ **Signal d'entrée**

Indépendant du système, il se décompose en **commandable** et **non commandable** (perturbations).

➤ **Signal de sortie**

Dépendant du système et de signal d'entrée, il existe une sortie observable et non observable.

II.1.2 Signaux de commande

Pour analyser le comportement d'un système, on utilise un ensemble de signaux d'entrée (signaux tests).

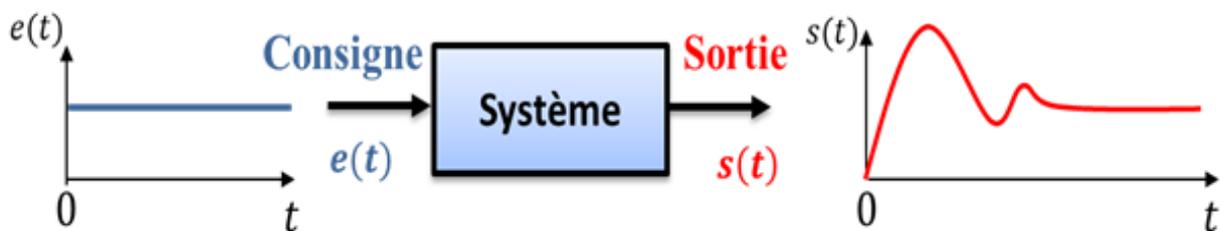


Figure II.1: L'analyse du comportement d'un système

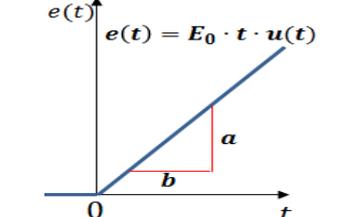
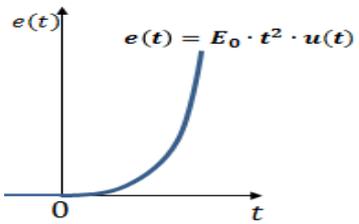
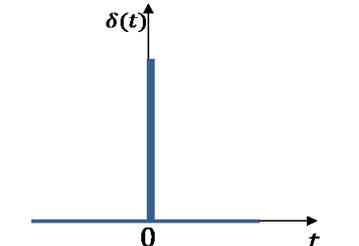
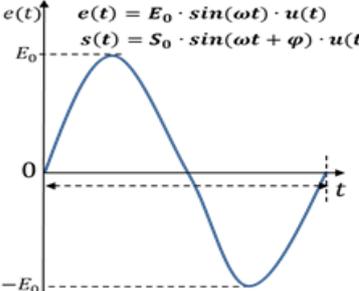
On peut analyser, soulever les caractéristiques d'un système et comparer les résultats obtenus par utilisation des signaux de tests. C'est grâce à ces signaux qu'on peut voir l'évolution de la sortie du système.

II.1.3 Signaux tests

L'étude d'un système asservi se fait à travers le comportement du système en réponse à des signaux d'entrées particulières (canoniques) montrés dans le tableau ci-dessous:

Tableau II.1: Les différents signaux utilisés pour commander un système

<ul style="list-style-type: none"> • Signal en Échelon : E_0 Étant une constante positive, si $E_0 = 1$, $e(t) = 1 \cdot u(t)$. Dans ce cas $e(t)$ est appelée un échelon de position unitaire. $u(t)$ Fonction de Heaviside (0 pour $t < 0$ et 1 si $t \geq 0$). Ce signal permet d'analyser la précision statique, rapidité. 	
--	--

<p>• Signal en Rampe : Dans ce cas, E_0 définit la pente de la rampe avec : $E_0 = \frac{a}{b}$. Si $E_0 = 1$, $e(t) = 1 \cdot t \cdot u(t)$. $e(t)$ est appelé échelon de vitesse unitaire. Ce signal permet d'analyser la réponse d'un système en poursuite (précision dynamique)</p>	
<p>• Signal en accélération : $e(t) = E_0 \cdot t^2 \cdot u(t)$ Si $E_0 = 1$, $e(t) = 1 \cdot t^2 \cdot u(t)$ $e(t)$ est appelé échelon d'accélération unitaire.</p>	
<p>• Impulsion de Dirac : Ce signal permet de simuler l'effet d'une action s'exerçant durant un temps très bref (impulsion, choc). La transformée de Laplace de ce signal est : $\delta(p)=1$. Ce signal permet d'analyser la stabilité</p>	
<p>• Signal sinusoïdal : Dans ce cas, E_0, S_0 sont définis par les amplitudes maximales du signal d'entrée et de sortie respectivement. Ce signal permet d'analyser la réponse fréquentielle (diagramme de Bode) d'un système. ω: est la pulsation. φ: est le déphasage du signal.</p>	

II.2 Mise en équations des systèmes linéaires (équations différentielles)

Un système linéaire continu et invariant dans le temps (SLIT) d'une seule entrée et une seule sortie (monovariante) est représenté d'une manière générale par une équation différentielle à coefficients constants sous la forme de:

$$a_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \cdot \frac{ds(t)}{dt} + a_0 \cdot s(t) = b_m \cdot \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \cdot \frac{de(t)}{dt} + b_0 \cdot e(t) \tag{II.1}$$

Etant donné que : $e(t)$ est l'entrée du système et $s(t)$ est la sortie. Les coefficients a_n, \dots, a_1, a_0 , et b_m, \dots, b_1, b_0 sont des constantes réelles non nulles. De plus, pour un système physique le degré du dénominateur (n) est supérieur à celui du numérateur (m): $n \geq m$. n Étant l'ordre du système.

Un système est causal où $\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \end{cases}$ et toutes les dérivées de x et de y pour $t < 0$

Les transformations de Laplace permettent de travailler aisément avec ce type d'équation qui devient sous réserve de conditions initiales nulles.

Un procédé industriel est un ensemble de systèmes élémentaires tels que les capteurs, les actionneurs et le procédé.

Chacun de ces éléments peut être représenté par une équation différentielle. Alors pour trouver l'équation qui regroupe la totalité de ces équations est une tâche très dure. L'obtention d'une fonction décrivant le procédé industriel est devenue facile et rapide avec l'opérateur de Laplace.

La méthode de recherche du signal $s(t)$ en fonction de $e(t)$ est alors la suivante :

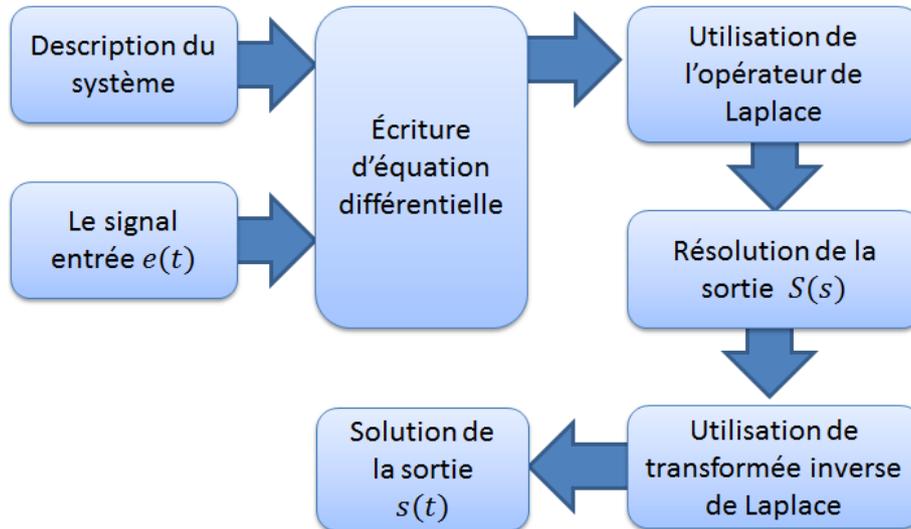


Figure II.2: La procédure de recherche d'un signal de sortie $s(t)$

II.3 Approximation linéaire des systèmes physiques

Ce cours traite des systèmes causaux, linéaires et à temps invariant (SLTI), mais dans plusieurs systèmes physiques (réels), le comportement d'un ou plusieurs composants n'est pas linéaire. Ce qui suppose que les systèmes sont linéaires.

Si certains composants non-linéaires sont présents dans le système, il faudra linéariser le système. Lorsqu'on linéarise un système, on le fait seulement pour une entrée spécifique.

Soit la fonction $f(x)$ de la Figure II.3, le système opère au point A .

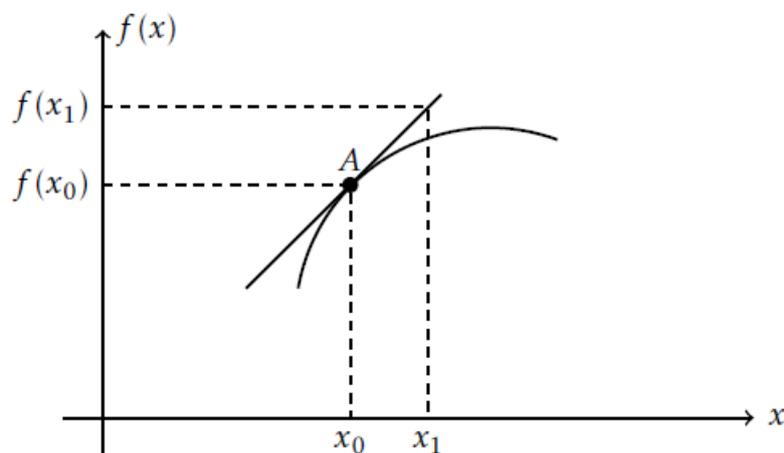


Figure II.3: Un exemple de linéarisation d'une fonction

On prend la pente au point A pour créer une ligne droite. La pente est m_a . Si on fait varier (faiblement) le point A le long de cette ligne, la différence entre la valeur réelle et la valeur linéarisée sera faible.

$$[f(x_1) - f(x_0)] \approx m_a(x_1 - x_0) \quad (\text{II.2})$$

$$\delta f(x) \approx m_a \delta x$$

On peut l'écrire d'une autre façon :

$$f(x) \approx f(x_0) + m(x_1 - x_0) \approx f(x_0) + m_a \delta x \quad (\text{II.3})$$

➤ Exercice d'application 1

Linéariser $f(x) = 5\cos x$ au point $x = \frac{\pi}{2}$

On prend la dérivée de la fonction au point recherché pour trouver la pente.

$$\left. \frac{d(5\cos x)}{dx} \right|_{x=\frac{\pi}{2}} = -5\sin x \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -5 \quad (\text{II.4})$$

Au point recherché, $f(x_0) = 5 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Donc,

$$f(x) = f(x_0) + m_a \delta x = 0 - 5\delta x = -5\delta x \quad (\text{II.5})$$

Sur la Figure II.4, on voit bien que la fonction ressemble à la ligne droite au point recherché.

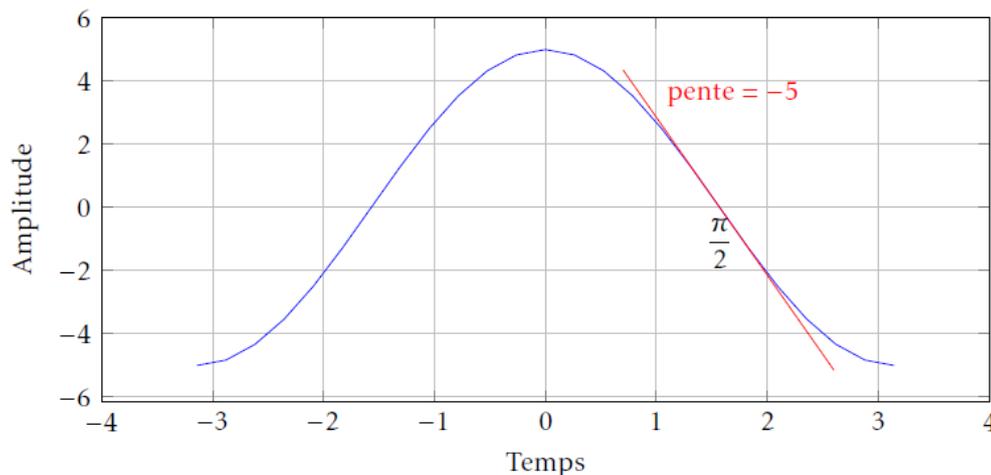


Figure II.4: La fonction linéarisée

On peut formaliser ce processus en utilisant une expansion en séries de Taylor.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} \cdot \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2!} \cdot \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=x_0} + \dots \quad (\text{II.6})$$

Si x varie peu de x_0 , on peut négliger les termes d'ordre supérieur.

$$f(x) - f(x_0) \approx (x - x_0) \cdot \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=x_0} \quad (\text{II.7})$$

$$\delta f(x) = m|_{x=x_0} \delta x$$

II.4 La transformation de Laplace

Est une technique mathématique largement utilisée pour analyser les systèmes dynamiques et les signaux dans le domaine de la théorie des systèmes et de la théorie du contrôle. Elle permet de convertir une fonction du temps en une fonction complexe de la fréquence complexe s , avec $s = \sigma + j\omega$, avec σ et ω étant les parties réelles et imaginaires de s respectivement.

II.4.1 Définition de la transformée de Laplace d'une fonction

On définit une fonction particulière $u(t)$ décrite ci-dessous, une fonction existante ou échelon unitaire.

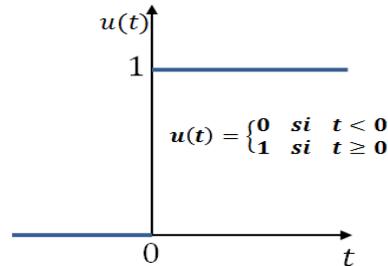


Figure II.5: L'échelon unitaire

On associe à la fonction $f(t)$ une autre fonction $F(s)$ de la variable complexe s appelée transformée de Laplace ainsi définie :

$$\mathcal{L}[f(t) \cdot u(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad (\text{II.8})$$

- L'existence de $F(s)$ nécessite que l'intégrale converge.

II.4.2 Les propriétés fondamentales de la transformée de Laplace

- **Linéarité de la transformée de Laplace :**

Si les fonctions f et g ont des transformées de Laplace, a et b sont deux constantes alors:

$$\mathcal{L}[a \cdot f(t)] = a \cdot F(s) \quad (\text{II.9})$$

$$\mathcal{L}[a \cdot f(t) + b \cdot g(t)] = a \cdot F(s) + b \cdot G(s)$$

- **Dérivation:**

$$\text{Si } F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \text{ alors } \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{dt}\right] = s \cdot F(s) - f(0^+) \quad (\text{II.10})$$

- **Dérivation d'ordre n:**

$$\mathcal{L}[f^n(t)] = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0^+) - \dots - s f^{n-2}(0^+) - f^{n-1}(0^+) \quad (\text{II.11})$$

- **Intégration :**

$$\text{Si } G(s) = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] \text{ alors } G(s) = \frac{F(s)}{s} + \frac{g(0^+)}{s} \quad (\text{II.12})$$

- **Retard :**

$$\mathcal{L}[f(t - \theta)] = e^{-\theta \cdot s} \cdot F(s) \quad (\text{II.13})$$

- **Changement d'échelle :**

$$\mathcal{L}[f(a \cdot t)] = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (\text{II.14})$$

A ces propriétés, on doit joindre les théorèmes suivants :

- **Théorème de la valeur initiale :**

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \cdot F(s) \quad (\text{II.15})$$

- **Théorème de la valeur finale :**

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) \quad (\text{II.16})$$

Tableau II.2 : Table de la transformée de Laplace

$f(t)$ pour $t > 0$	$F(s)$
Impulsion unitaire $\delta(t)$	1
Echelon unitaire $u(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n \cdot e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

$f(t)$ pour $t > 0$	$F(s)$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$t \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{2s \cdot \omega}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$e^{-at} \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$

- **En prenant la TL de l'équation différentielle (II.1)**

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^i e(t)}{dt^i}\right\} = s^i \cdot E(s) \quad (\text{II.17})$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^i s(t)}{dt^i}\right\} = s^i \cdot S(s)$$

On trouve :

$$(a_n \cdot s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0) \cdot S(s) = (b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0) \cdot E(s) \quad (\text{II.18})$$

II.4.3 Transformée inverse de Laplace

De même qu'une fonction du temps peut avoir une transformée de Laplace, il est possible à partir d'une fonction $F(s)$ de trouver son original $f(t)$, autrement dit la transformée inverse de Laplace:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) \cdot e^{st} dt \quad (\text{II.19})$$

En générale, on n'utilise pas cette formule, on détermine les transformées inverses à partir des tableaux, lorsque $F(s)$ n'est pas donnée directement sur les tables, on transforme $F(s)$ en une combinaison d'éléments des tables, pour cela, soit :

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0} \quad (\text{II.20})$$

Racines simples :

- Si $D(s) = 0$ a des racines simples c.à.d.

$$D(s) = (s - s_1) \cdot (s - s_2) \dots (s - s_n) \quad (\text{II.21})$$

$$s \neq s_1 \neq s_2 \neq \dots s_n$$

Alors :

$$F(s) = \frac{A_1}{(s-s_1)} + \frac{A_2}{(s-s_2)} + \dots + \frac{A_3}{(s-s_n)} \quad (\text{II.22})$$

$$A_i = \lim_{s \rightarrow s_i} [(s - s_i) \cdot F(s)]$$

➤ **Exercice d'application 2**

Soit la fonction suivante, calculer la réponse $y(t)$

$$F(s) = \frac{2 \cdot s^2 + 12 \cdot s + 6}{s(s+2) \cdot (s+3)} \quad (\text{II.23})$$

Décomposition en éléments simples l'équation (II.23):

$$F(s) = \frac{2 \cdot s^2 + 12 \cdot s + 6}{s(s+2) \cdot (s+3)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s+2)} + \frac{A_3}{(s+3)} \quad (\text{II.24})$$

Méthode 1 : Par identification,

On trouve :

$$\begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = 5 \\ A_3 = -4 \end{cases} \quad (\text{II.25})$$

On remplace les coefficients (A_1, A_2, A_3) calculés dans l'équation (II.25) dans (II.24), on trouve :

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{5}{(s+2)} - \frac{4}{(s+3)} \quad (\text{II.26})$$

Méthode 2 : Par les limites,

$$s \neq s_1 \neq s_2 \neq \dots s_n \quad (\text{II.27})$$

$$s_1 = 0, s_2 = -2, s_3 = -3$$

On trouve :

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow s_1} [(s - s_1) \cdot F(s)] \quad (\text{II.28})$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot F(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{2 \cdot s^2 + 12 \cdot s + 6}{s \cdot (s+2) \cdot (s+3)} \right] = 1$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow s_2} [(s - s_2) \cdot F(s)] \quad (\text{II.29})$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -2} [(s - s_2) \cdot F(s)] = \lim_{s \rightarrow -2} \left[(s + 2) \cdot \frac{2 \cdot s^2 + 12 \cdot s + 6}{s \cdot (s+2) \cdot (s+3)} \right] = 5$$

$$A_3 = \lim_{s \rightarrow s_3} [(s - s_3) \cdot F(s)] \quad (\text{II.30})$$

$$A_3 = \lim_{s \rightarrow -3} [(s - s_3) \cdot F(s)] = \lim_{s \rightarrow -3} \left[(s + 3) \cdot \frac{2 \cdot s^2 + 12 \cdot s + 6}{s \cdot (s+2) \cdot (s+3)} \right] = -4$$

On remplace les coefficients (A_1, A_2, A_3) calculés dans les équations (II.28)-(II.30) dans (II.26),

On trouve :

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{5}{(s+2)} - \frac{4}{(s+3)} \quad (\text{II.31})$$

En prenant la transformée inverse de Laplace:

$$y(t) = (1 + 5 \cdot e^{-2 \cdot t} - 4 \cdot e^{-3 \cdot t}) \cdot u(t) \quad (\text{II.32})$$

Racines multiples :

Si $D(s) = 0$ a des racines multiples

$$D(s) = (s - s_1) \cdot (s - s_2) \dots (s - s_n)^l$$

$$F(s) = \frac{A_1}{(s-s_1)} + \frac{A_2}{(s-s_2)} + \dots + \frac{C_1}{(s-s_i)} + \frac{C_2}{(s-s_i)} + \frac{C_l}{(s-s_i)^l} \quad (\text{II.33})$$

$$C_{l-j} = \lim_{s \rightarrow s_i} \left[\frac{1}{j!} \cdot \left(\frac{d^j}{ds^j} (s - s_i)^l \cdot F(s) \right) \right]; \quad j = 0, 1, 2, \dots, l - 1$$

➤ Exercice d'application 3

Soit la fonction suivante, calculer la réponse $f(t)$

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2 \cdot (s+1) \cdot (s+2)} \quad (\text{II.34})$$

Décomposition en éléments simples l'équation (II.34):

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2 \cdot (s+1) \cdot (s+2)} = \frac{A_1}{(s+1)} + \frac{A_2}{(s+2)} + \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s^2} \quad (\text{II.35})$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow s_1} [(s - s_1) \cdot F(s)]$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow -1} [(s + 1) \cdot F(s)] = \lim_{s \rightarrow -1} \left[\cancel{(s + 1)} \cdot \frac{s+3}{s^2 \cdot \cancel{(s+1)} \cdot (s+2)} \right] = 2 \quad (\text{II.36})$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow s_2} [(s - s_2) \cdot F(s)]$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -2} [(s - s_2) \cdot F(s)] = \lim_{s \rightarrow -2} \left[\cancel{(s + 2)} \cdot \frac{s+3}{s^2 \cdot (s+1) \cdot \cancel{(s+2)}} \right] = -\frac{1}{4} \quad (\text{II.37})$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow s_i} \left[\frac{1}{j!} \cdot \left(\frac{d^j}{ds^j} s^l \cdot F(s) \right) \right]; \quad j = 0, 1, 2, \dots, l - 1$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{0!} \cdot \left(\frac{d^0}{ds^0} s^2 \cdot F(s) \right) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s^2 \cdot \frac{s+3}{s^2 \cdot (s+1) \cdot (s+2)} \right] = \frac{3}{2} \quad (\text{II.38})$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{d^1}{ds^1} s^2 \cdot F(s) \right) \right]$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{d^1}{ds^1} \left(s^2 \cdot \frac{s+3}{s^2 \cdot (s+1) \cdot (s+2)} \right) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{-(s^2+6s+7)}{((s+1) \cdot (s+2))^2} \right) \right] = -\frac{7}{4} \quad (\text{II.39})$$

On remplace les coefficients (A_1, A_2, C_1, C_2) calculés dans les équations (II.36)-(II.39) dans (II.35), on trouve :

$$F(s) = \frac{A_1}{(s+1)} + \frac{A_2}{(s+2)} + \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s^2} = \frac{-2}{(s+1)} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(s+2)} - \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{s} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s^2} \quad (\text{II.40})$$

$$F(s) = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{-8}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)} - \frac{7}{s} + \frac{6}{s^2} \right]$$

D'où :

$$f(t) = \frac{1}{4} \cdot [-8 \cdot e^{-t} - e^{-2t} - 7 + 6 \cdot t] \quad (\text{II.41})$$

II.5 Fonction de transfert des systèmes linéaires

On appelle fonction de transfert ou transmittance la fonction $H(s)$:

$$\text{Ou encore : } H(s) = \frac{S(s)}{E(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i \cdot s^i}{\sum_{j=0}^n a_j \cdot s^j} \quad (\text{II.42})$$

$$S(s) = H(s) \cdot E(s)$$

Et la réponse temporelle du système s'obtient donc par :

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s) \cdot E(s)\} \quad (\text{II.43})$$

$H(s)$: Représente le comportement du système indépendamment du signal d'entrée. Le schéma bloc Figure II.6, dans le domaine de Laplace, définit le modèle mathématique du système.

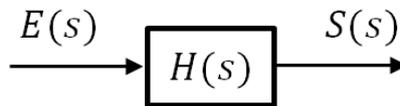


Figure II.6: Schéma bloc dans le domaine de Laplace

On définit :

- **Les pôles** : les racines du dénominateur ;
- **Les zéros** : les racines du numérateur.
- **L'ordre du système** : est le degré n du polynôme du dénominateur.

Remarque : Il est souvent préférable de mettre en évidence le gain K du système ainsi que le nombre α d'intégrateurs purs aussi appelé **type du système**.

$$H(s) = \frac{K}{s^\alpha} \frac{b_m/b_0 \cdot s^m + \dots + b_1/b_0 \cdot s + 1}{a_n/a_0 \cdot s^n + \dots + a_1/a_0 \cdot s + 1} \quad (\text{II.44})$$

- α : La classe du système
- $n+\alpha$: L'ordre du système
- K : Le gain statique de la fonction de transfert

II.6 Exemples des fonctions de transferts

➤ Système du premier ordre électrique

Le circuit RC de la Figure II.7 est composé d'une résistance R et d'un condensateur C connectés en série, et alimenté par une source de tension $e(t)$. La sortie du circuit est la tension aux bornes du condensateur $s(t)$.

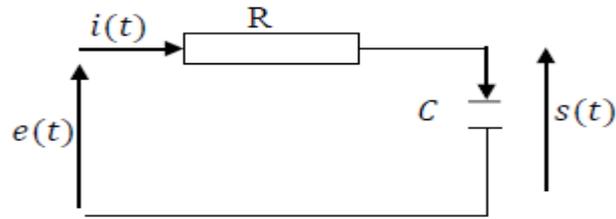


Figure II.7: Circuit RC

On applique la deuxième loi de Kirchhoff, cette loi stipule que la somme algébrique des tensions dans une boucle fermée d'un circuit est nulle. En appliquant cette loi au circuit RC, on obtient :

$$\begin{aligned} e(t) - R \cdot i(t) - s(t) &= 0 \\ e(t) &= R \cdot i(t) + s(t) \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

où $i(t)$ est le courant qui circule dans le circuit.

$$i(t) = C \frac{ds(t)}{dt} \quad (\text{II.46})$$

Remplaçant (II.44) dans (II.43) on obtient l'équation différentielle

$$e(t) = R \cdot C \frac{ds(t)}{dt} + s(t) \quad (\text{II.47})$$

On applique la transformée de Laplace à l'équation différentielle précédente avec des conditions initiales nulles, on obtient la fonction de transfert $G(s)$:

$$\begin{aligned} E(s) &= R \cdot C \cdot s \cdot S(s) + S(s) \\ E(s) = S(s) \cdot [R \cdot C \cdot s + 1] &\Rightarrow H(s) = \frac{S(s)}{E(s)} = \frac{1}{R \cdot C \cdot s + 1} \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

Ce système est donc modélisé par une équation différentielle du premier ordre. On dit aussi que le système est de premier ordre.

➤ Système du second ordre électrique

Le circuit RLC de la Figure II.8 est composé d'une résistance R , d'un condensateur C et d'une inductance L connectés en série, et alimentés par une source de tension $e(t)$. La sortie du circuit est la tension aux bornes du condensateur $s(t)$.

$$e(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + s(t) \quad (\text{II.49})$$

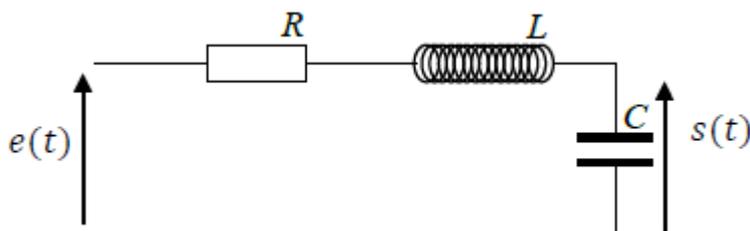


Figure II.8: Circuit RLC

En appliquant la deuxième loi de Kirchhoff au circuit RLC, on obtient une équation différentielle reliant la sortie $s(t)$ à l'entrée $e(t)$:

$$e(t) = R.C.\frac{ds(t)}{dt} + L.C.\frac{d^2s(t)}{dt^2} + s(t) \quad (\text{II.50})$$

On applique la transformée de Laplace à l'équation différentielle précédente avec des conditions initiales nulles, on obtient la fonction de transfert $G(p)$:

$$e(t) = R.C.\frac{ds(t)}{dt} + L.C.\frac{d^2s(t)}{dt^2} + s(t) \quad (\text{II.51})$$

$$E(s) = S(s) \cdot [L.C.s^2 + R.C.s + 1] \Rightarrow H(s) = \frac{S(s)}{E(s)} = \frac{1}{L.C.s^2 + R.C.s + 1}$$

➤ Exemple d'une fonction de transfert (système mécanique)

Le système mécanique de la Figure II.9 est appelé système masse-ressort-amortisseur et est utilisé pour modéliser de nombreux systèmes physiques.

Il est formé d'une masse M , d'un ressort de raideur k et d'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux B , tous connectés en série. Le système est soumis à une force extérieure f .

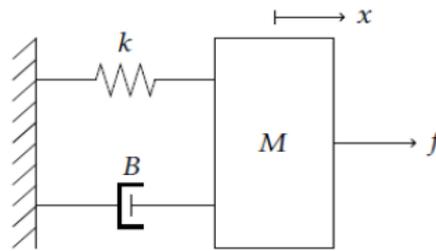


Figure II.9: Système mécanique

L'équation du mouvement du système peut être obtenue en appliquant la deuxième loi de Newton qui stipule que la somme des forces agissant sur un corps est égale à sa masse multipliée par son accélération.

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a} \quad (\text{II.52})$$

$$f(t) - kx(t) - B\dot{x}(t) = M.\ddot{x}(t)$$

On Applique la transformée de Laplace à l'équation différentielle précédente avec des conditions initiales nulles, on obtient la fonction de transfert $G(s)$:

$$F(s) - k.X(s) - B.s X(s) = M.s^2x(s) \quad (\text{II.53})$$

$$F(s) = [s^2.M + s.B + k].X(s) \Rightarrow H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2.M + s.B + k}$$

Ce système est donc modélisé par une équation différentielle du second ordre. On dit aussi que le système est de second ordre.

II.7 Exercice d'application

Résoudre l'équation différentielle par la transformée de Laplace :

Un système régit par une équation différentielle avec $e(t)$ est l'entrée du système et $y(t)$ est la sortie:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = e(t) \quad (\text{II.54})$$

Conditions initiales : $\frac{dy}{dt}(0) = 2$ et $y(0) = 2$

Signal d'entrée : à l'instant $t = 0$, on applique une entrée constante $e(t) = 6$. Que vaut $y(t)$?

On applique la transformée de Laplace à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = e(t) \quad (\text{II.55})$$

Avec des conditions initiales nulles, on obtient la fonction de transfert :

$$s^2 \cdot Y(s) + 5 \cdot s \cdot Y(s) + 6Y(s) = E(s) \quad (\text{II.56})$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \quad (\text{II.57})$$

La transformée de Laplace du signal d'entrée :

$$e(t) = 6 \cdot u(t) \Rightarrow E(s) = \frac{6}{s} \quad (\text{II.58})$$

Donc, en conditions initiales nulles, on obtient :

$$Y_0(s) = H(s) \cdot E(s) = \frac{6}{s \cdot (s^2 + 5s + 6)} = \frac{6}{s \cdot (s+2) \cdot (s+3)} \quad (\text{II.59})$$

En prenant en compte les conditions initiales $\dot{y}(0) = 2$ et $y(0) = 2$, on obtient :

$$s^2 \cdot Y(s) - 2 \cdot s - 2 + 5 \cdot (s \cdot Y(s) - 2) + 6 \cdot Y(s) = E(s) = \frac{6}{s} \quad (\text{II.60})$$

$$\text{Donc :} \quad Y(s) \cdot (s^2 + 5 \cdot s + 6) = \frac{6}{s} + 2 \cdot s + 12 \quad (\text{II.61})$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{6}{s(s^2 + 5s + 6)} + \frac{2 \cdot s + 12}{(s^2 + 5s + 6)} \quad (\text{II.62})$$

$$\Rightarrow Y(s) = H(s) \cdot E(s) + \frac{2 \cdot s + 12}{(s^2 + 5s + 6)} \quad (\text{II.63})$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{2 \cdot s^2 + 12 \cdot s + 6}{s \cdot (s^2 + 5s + 6)} \quad (\text{II.64})$$

Décomposition en éléments simples l'équation (II.64):

$$Y(s) = \frac{2 \cdot s^2 + 12 \cdot s + 6}{s(s+2) \cdot (s+3)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{(s+2)} + \frac{c}{(s+3)} \quad (\text{II.65})$$

Par identification, on trouve :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \\ c = -4 \end{cases} \quad (\text{II.66})$$

On remplace des coefficients (a, b, c) de l'équation (II.66) dans (II.65), on trouve :

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{5}{(s+2)} - \frac{4}{(s+3)} \quad (\text{II.67})$$

En prenant la transformée de Laplace inverse :

$$y(t) = (1 + 5 \cdot e^{-2t} - 4 \cdot e^{-3t}) \cdot u(t) \quad (\text{II.68})$$

Chapitre III : Représentation graphique des systèmes linéaires

III.1 Représentations graphiques des systèmes linéaires :

Deux modèles graphiques des systèmes dynamiques seront présentés dans cette partie, notamment le schéma fonctionnel et le graphe de fluence.

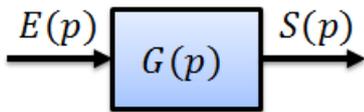
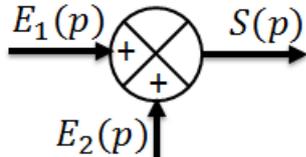
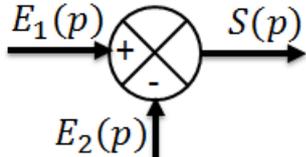
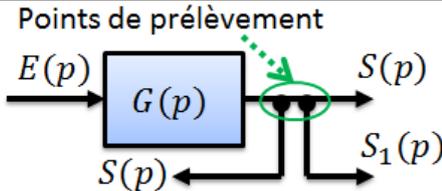
III.2 Notion du schéma fonctionnel

Un schéma fonctionnel ou un schéma bloc est une représentation graphique simplifiée d'un processus ou d'un système. Pour cela, on fait appel à des symboles graphiques pour la représentation des différentes composantes et les connexions entre elles.

Dans le cas des systèmes asservis, un schéma bloc est un diagramme qui représente les différentes étapes de la boucle de régulation, depuis la mesure de la grandeur à réguler jusqu'à la génération du signal de commande pour l'actionneur.

Les symboles graphiques utilisés pour représenter les différents composants de la boucle de régulation sont standardisés

Tableau III.1: Les quatre schémas élémentaires utilisés dans la représentation fonctionnelle

N°	Symboles graphiques	Symboles élémentaires	Equations
1	Bloc		$S(p) = G(p) \cdot E(p)$
2	Sommateur		$S(p) = E_1(p) + E_2(p)$
3	Comparateur		$S(p) = E_1(p) - E_2(p)$
4	Capteur (point de prélèvement)		$S(p) = S_1(p) = G(p) \cdot E(p)$

III.3 Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO)

Un système en boucle ouverte est un système qui ne comporte pas de chaîne de retour (contre-réaction) entre la sortie et l'entrée. La fonction FTBO correspond à l'ouverture de la boucle comme montrée dans la figure suivante.

Dans ce cas-là, le comparateur ne reçoit que le signal $E(p)$ puisque le signal $M(p)$ n'est pas branché avec le comparateur, $M(p)$ devient la sortie en boucle ouverte.

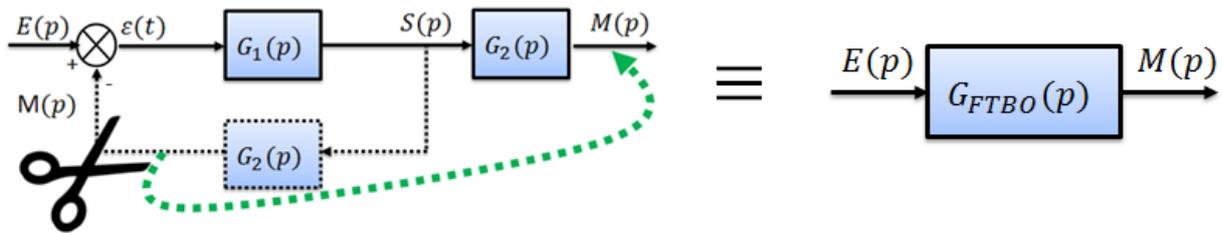


Figure III.1: Le calcul de la FTBO

$$M(p) = G_2(p) \cdot S(p) = G_2(p) \cdot [G_1(p) \cdot \varepsilon(p)] = G_2(p) \cdot [G_1(p) \cdot E(p)]$$

D'où :

$$G_{FTBO} = \frac{M(p)}{E(p)} = G_1(p) \cdot G_2(p)$$

La fonction de transfert en boucle ouverte à une grande importance dans l'étude de la stabilité des systèmes.

III.4 Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF)

Soit un système asservi simplifié présenté ci-dessous par deux fonctions de transferts G_1 et G_2 qui représentent chacune d'elle la chaîne d'action et la chaîne de retour respectivement:

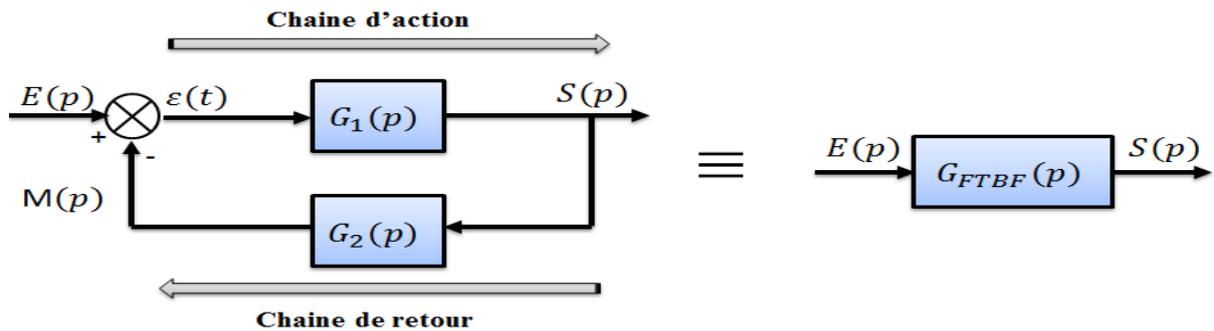


Figure III.2 : Schéma bloc d'un asservissement en boucle fermée

Pour trouver la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF), $G_{FTBF} = \frac{S(p)}{E(p)}$, on utilise les relations suivantes :

$$S(p) = G_1(p) \cdot \varepsilon(p) \quad ; \quad \varepsilon(p) = E(p) - M(p) \quad ; \quad M(p) = G_2(p) \cdot S(p)$$

On remplace les deuxièmes équations par la première équation et on trouve :

$$S(p) = G_1(p) \cdot [E(p) - M(p)] = G_1(p) \cdot (E(p) - [G_2(p) \cdot S(p)])$$

$$S(p) = G_1(p) \cdot E(p) - (G_1(p) \cdot G_2(p) \cdot S(p))$$

$$S(p)[1 + (G_1(p) \cdot G_2(p))] = G_1(p) \cdot E(p)$$

D'où :

$$G_{FTBF} = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G_1(p)}{1 + G_1(p) \cdot G_2(p)} = \frac{G_1(p)}{1 + G_{FTBO}}$$

Si $G_2(p) = 1$, alors la fonction G_{FTBF} à un retour unitaire.

$$G_{FTBF} = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G_1(p)}{1 + G_1(p)}$$

III.5 Réduction des schémas fonctionnels

Les étapes à suivre pour la réduction et la simplification des schémas blocs reviennent à leur faire des transformations pour mettre en évidence la fonction de transfert.

Pour se faire, nous utiliserons un certain nombre de règles élémentaires qui sont :

- Règle 1 : Associer tous les éléments en série (cascade)



Figure III.3: Association de deux éléments en série

- Règle 2 : Associer tous les éléments en parallèle



Figure III.4: Association de deux blocs en parallèle

- Règle 3 : Retrait d'un élément d'une chaîne d'action



Figure III.5 : Retrait d'un élément d'une chaîne d'action

- Règle 4 : Elimination d'une boucle de retour



Figure III.6: Elimination d'une boucle de retour

➤ Règle 5 : Retrait d'un élément d'une boucle de retour

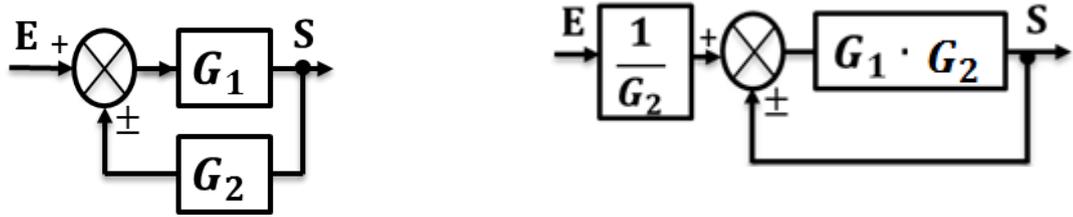


Figure III.7: Retrait d'un élément d'une boucle de retour

➤ Règle 6 : Redisposition des comparateurs

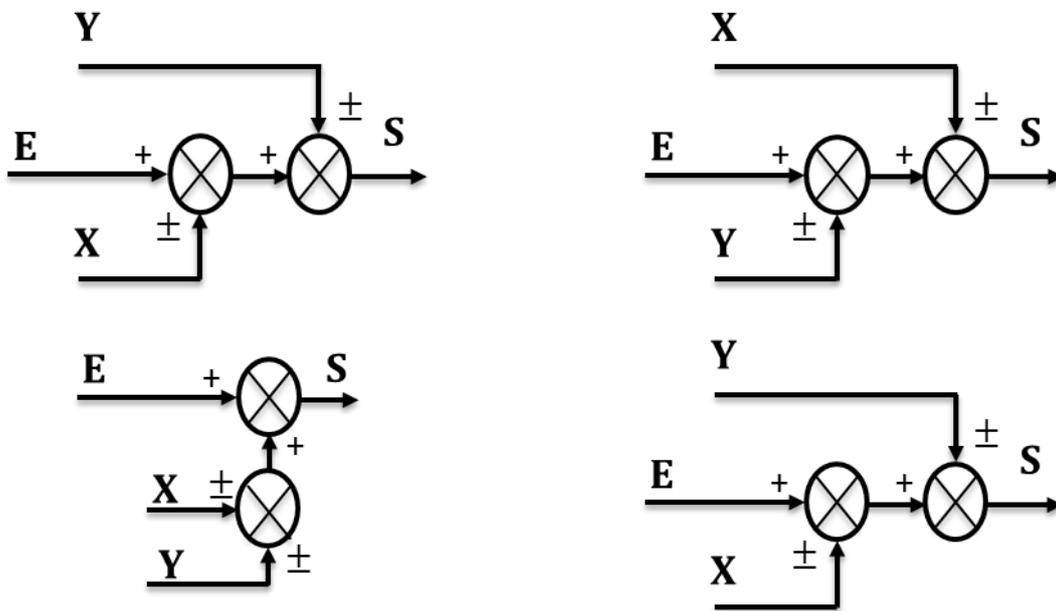


Figure III.8: Redisposition des comparateurs

➤ Règle 7 : Permutation des points de prélèvement

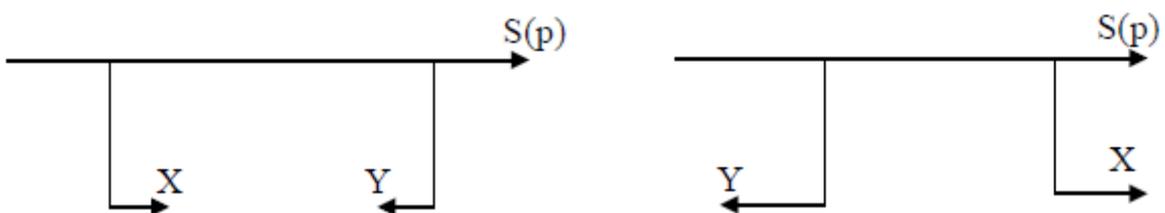


Figure III.9: Permutation des points de prélèvement (capteurs)

➤ Règle 8 : Transformation d'un comparateur en sommateur



Figure III.10: Transformation d'un comparateur en sommateur

➤ Règle 9 : Déplacement d'un comparateur en amont d'un élément



Figure III.11: Déplacement d'un comparateur en amont d'un élément

➤ Règle 10 : Déplacement d'un comparateur en aval d'un élément



Figure III.12: Déplacement d'un comparateur en aval d'un élément

➤ Règle 11 : Déplacement d'un point de dérivation en amont d'un élément



Figure III.13: Déplacement d'un point de dérivation en amont d'un élément

➤ Règle 12 : Déplacement d'un point de dérivation en aval d'un élément



Figure III.14: Déplacement d'un point de dérivation en aval d'un élément

III.6 La procédure à suivre pour simplifier et réduire un schéma fonctionnel

La procédure pour simplifier et réduire un schéma fonctionnel compliqué est la suivante :

- **Étape 1** : Associer tous les éléments en série (règle 1).
- **Étape 2** : Associer tous les éléments en parallèle (règle 2).
- **Étape 3** : Éliminer toutes les boucles de retour non principales (règle 4).
- **Étape 4** : Faire passer les comparateurs à gauche, et les points de dérivation à droite de la boucle principale (règle 9, 12).
- **Étape 5** : Utiliser Les règles 3,6,7, 10 et 11 si nécessaire pour continuer la simplification.
- Répéter les étapes de 1 à 5 jusqu'à l'obtention de la forme canonique pour un signal d'entrée particulier.

III.7 Exemples d'applications

➤ Exemple 1 : système à une seule entrée

Au moyen du tableau de réduction des schémas fonctionnels, chercher la fonction de transfert du système suivant :

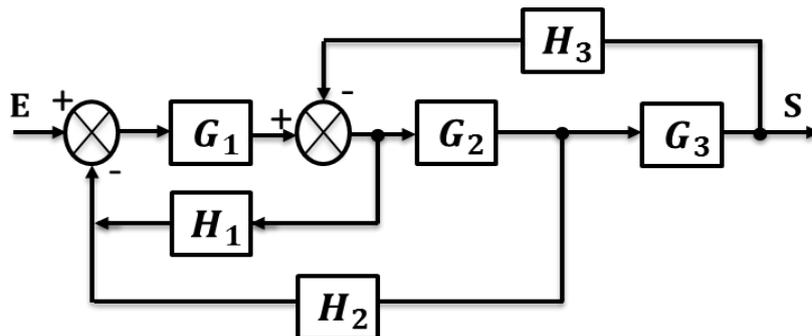


Figure III.15: Premier exemple de schéma fonctionnel à une seule entrée

➤ Exercice 2 : système à deux entrées

Soit le système bouclé perturbé, calculer l'expression de $S(p)$ en fonction de $E(p)$ et de $W(p)$

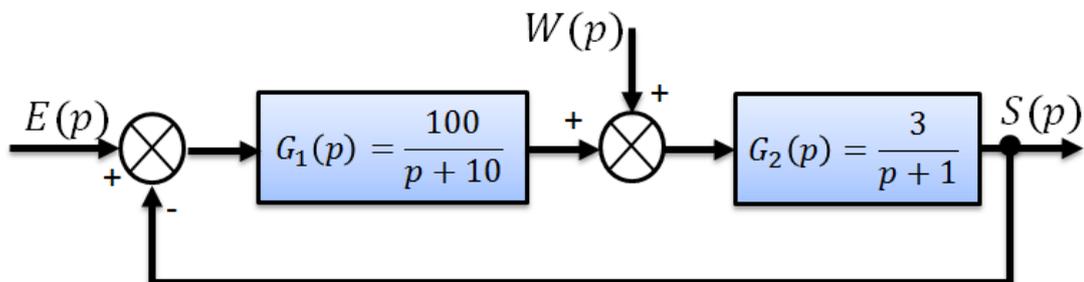


Figure III.16 : Deuxième exemple de schéma fonctionnel à deux entrées

➤ **Solution de l'exercice 1:**

Tout d'abord avant de déplacer un seul point de dérivation ou un comparateur, il faut chercher si on a des blocs en cascade ou en parallèle pour les associés.

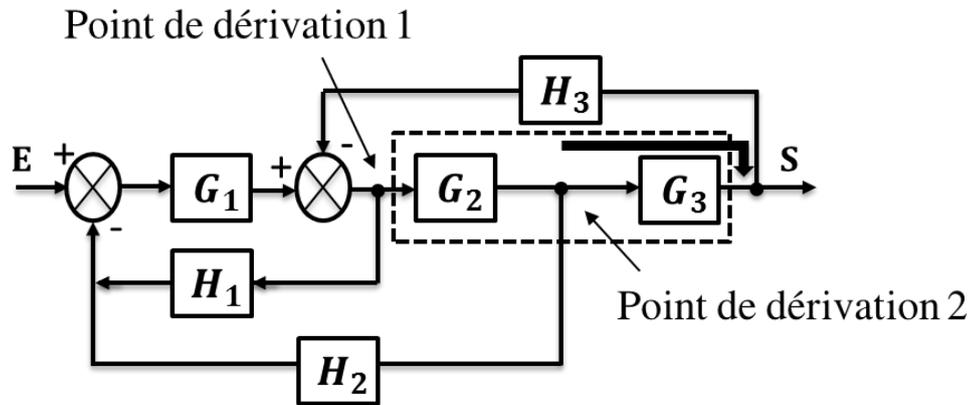


Figure III.17: Etape 1 de la réduction du schéma fonctionnel

- Association en série des deux blocs G_2 et G_3 , on a besoin de déplacer le point de dérivation 2 vers la gauche et le diagramme devient comme suit :

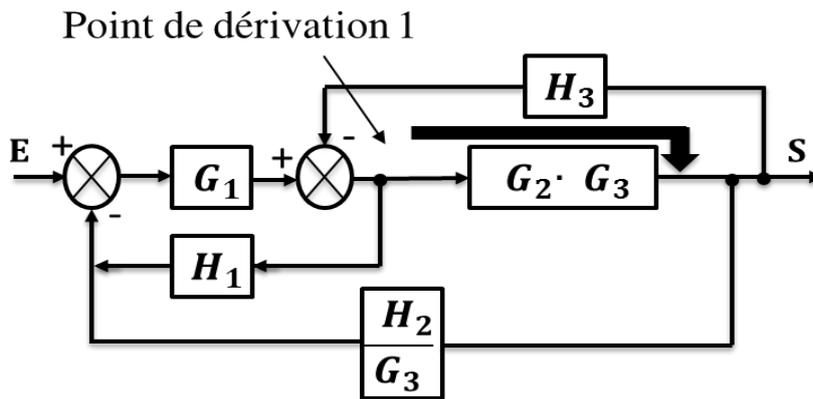


Figure III.18: Etape 2 de la réduction du schéma fonctionnel

- On va déplacer le point de dérivation 1 à droite :

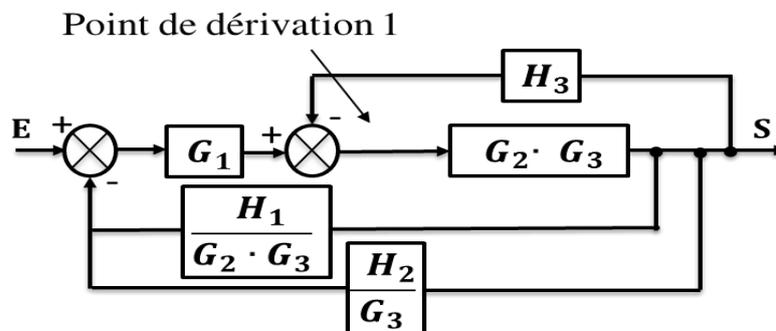


Figure III.19: Etape 3 de la réduction du schéma fonctionnel

- On calcule la boucle fermée secondaire de $G_2 \cdot G_3$ avec le retour H_3 :

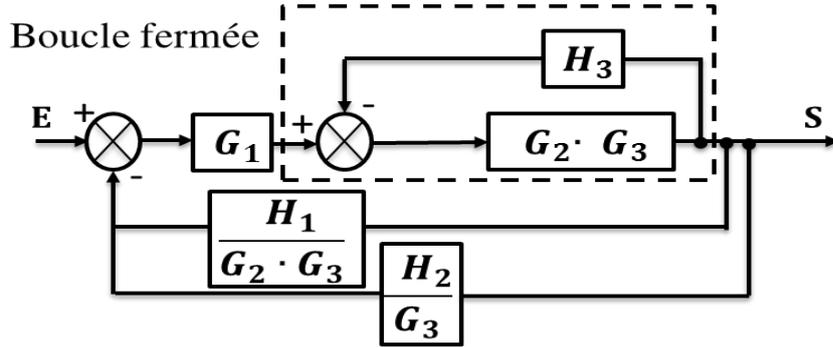


Figure III.20: Etape 4 de la réduction du schéma fonctionnel

- Associer les blocs en cascade :

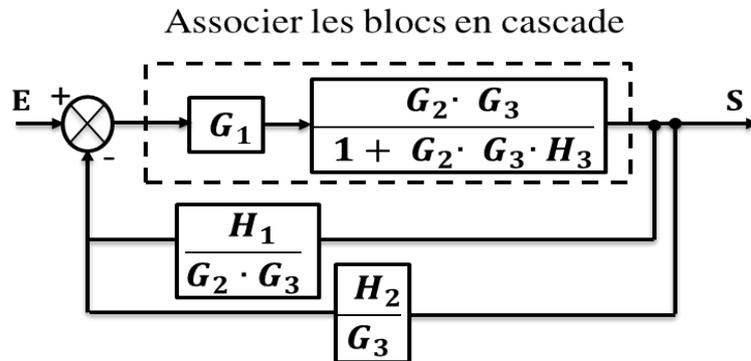
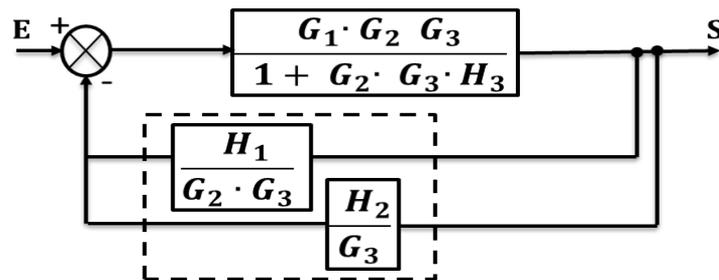


Figure III.21: Etape 5 de la réduction du schéma fonctionnel

- Associer les deux blocs de retour de rétroaction :



Additionner le deux blocs de retour

Figure III.22: Etape 6 de la réduction du schéma fonctionnel

- On calcule la boucle fermée principale :

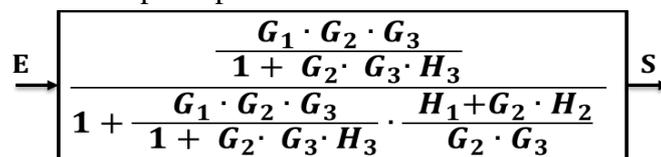


Figure III.23: La fonction de transfert après réduction du schéma fonctionnel

➤ **Solution de l'exercice 2:**

On applique le principe de superposition :

➤ **Le cas de $W(p) = 0$ et $E(p) \neq 0$:** Chaîne directe : $G_1(p) \cdot G_2(p)$ avec retour unitaire

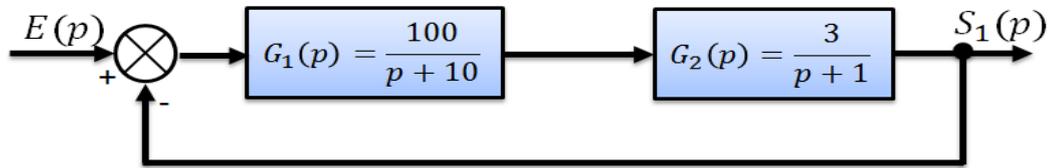


Figure III.24 : Schéma fonctionnel avec $W(p) = 0$

$$\frac{S_1(p)}{E(p)} = \frac{G_1(p) \cdot G_2(p)}{1 + G_1(p) \cdot G_2(p)}$$

➤ **Le cas de $W(p) \neq 0$ et $E(p) = 0$:** Chaîne directe : $G_2(p)$ avec retour $G_1(p)$

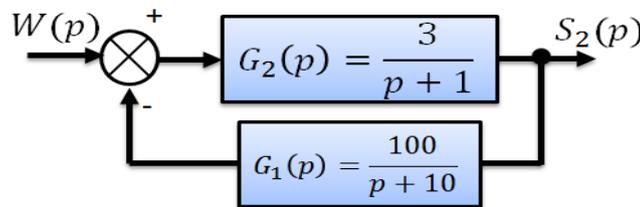


Figure III.25 : Schéma fonctionnel avec $E(p) = 0$

$$\frac{S_2(p)}{W(p)} = \frac{G_2(p)}{1 + G_1(p) \cdot G_2(p)}$$

$$S(p) = S_1(p) + S_2(p)$$

$$S(p) = \frac{G_1(p) \cdot G_2(p)}{1 + G_1(p) \cdot G_2(p)} \cdot E(p) + \frac{G_2(p)}{1 + G_1(p) \cdot G_2(p)} \cdot W(p)$$

III.8 Graphe de fluence (de transfert)

Le graphe de fluence (de transfert) est une autre sorte de représentation graphique des systèmes linéaires qui peut être utilisé à la place des diagrammes fonctionnels.

Cette méthode a été suggérée par S.J. Mason, permettant de simplifier l'écriture et la mise en équation des processus lorsque le nombre de variables augmente.

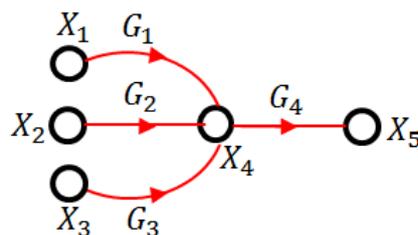


Figure III.26: Graphe de fluence

Le graphe de la Figure III.26, appelé: graphe de fluence, est équivalent aux équations algébriques suivantes :

$$\begin{cases} X_4 = G_1 \cdot X_1 + G_2 \cdot X_2 + G_3 \cdot X_3 \\ X_5 = G_4 \cdot X_4 = G_4 \cdot (G_1 \cdot X_1 + G_2 \cdot X_2 + G_3 \cdot X_3) \end{cases}$$

III.8.1 Définitions et propriétés d'un graphe de fluence

Un graphe de fluence est un type de graphe orienté, il est composé de nœuds associés chacun à une variable du système connecté par des arcs orientés représentant un transfert effectué sur le nœud (la variable) dans le sens de la propagation du flux, de l'aval vers l'amont.

- **Un nœud** : Est un point représentant une variable du système ou un signal.

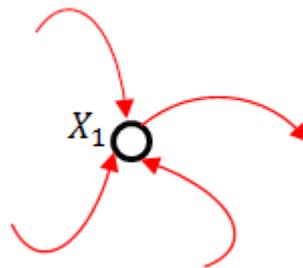


Figure III.27: Nœud associé à la variable X_1

- **Un nœud source** : ne comprend que des arcs divergents et il est associé à une entrée du système.
- **Un nœud puits** : ne comprend que des arcs convergents et il est associé à une sortie du système.



Figure III.28: Le nœud de source et de puits

- **Un arc** : Relie deux nœuds, représente un transfert (ou une transmittance) entre deux variables du système.

La valeur d'un nœud ayant une branche convergente est donnée par $X_2 = G_1 \cdot X_1$

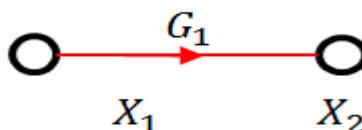


Figure III.29: Arc de transmittance G_1

- **Un chemin direct:** Peut inclure un ou plusieurs arcs, selon la complexité du système et la trajectoire du signal ou du flux.

Par exemple, un chemin simple peut ne comporter qu'un seul arc, dans le cas où il y a une seule transmittance directe entre deux variables, tandis qu'un chemin plus complexe peut comporter plusieurs arcs, dans le cas où il y a plusieurs transmittances et des boucles de rétroaction dans le système.

- **Le gain d'un chemin direct :** est d'une suite d'arcs est égale au produit des transmittances constituanes.

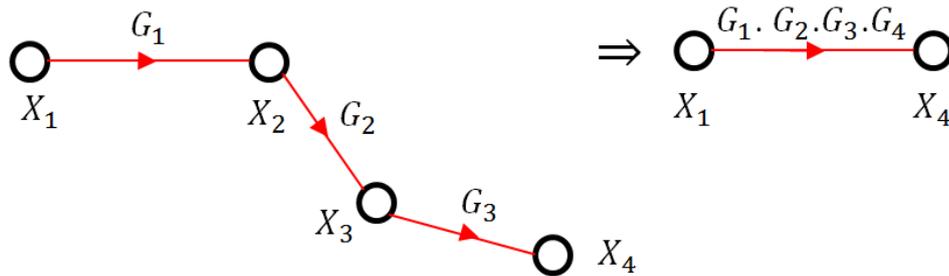


Figure III.30: Chemin X_1 à X_4

Une boucle : Est un chemin fermé. C'est un parcours suivant les flèches qui partant d'un nœud revient à ce même nœud sans passer 2 fois par le même nœud intermédiaire.

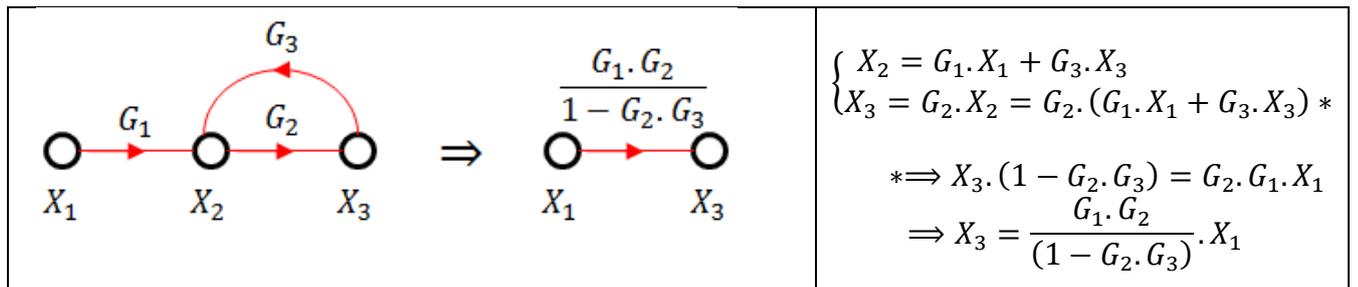
Le gain d'une boucle : est le produit des transmittances des arcs composant le chemin.

8.2 Réalisation des graphes

Dans le tableau ci-dessous les transformations élémentaires qui peuvent être utilisés lors de simplification ou l'écriture des équations d'un processus complexe.

Tableau III.2: Transformations élémentaires des graphes de Mason

	$\begin{cases} X_2 = G_1 \cdot X_1 \\ X_3 = G_2 \cdot X_2 \end{cases} \Rightarrow X_3 = G_1 \cdot G_2 \cdot X_1$
	$\begin{aligned} X_2 &= G_1 \cdot X_1 + G_2 \cdot X_1 \\ &= (G_1 + G_2) \cdot X_1 \end{aligned}$
	$\begin{cases} X_3 = G_1 \cdot X_1 + G_2 \cdot X_1 \\ X_4 = G_3 \cdot X_3 = G_3 \cdot (G_1 \cdot X_1 + G_2 \cdot X_1) \end{cases}$



III.8.3 Règle de Mason

La transmittance d'un graphe de transfert d'entrée $E(p)$ et de sortie $S(p)$ est déterminée comme suit :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_i M_i \Delta_i}{\Delta}$$

- **Trouver les chaînes directes et leurs gains M_i :**

Les chaînes directes sont les chemins de $E(p)$ vers $S(p)$ qui ne coupent pas le même point plus d'une fois.

Où :

i : un nombre entier représente le nombre de chaînes directes du système

- **Trouver les boucles et leurs gains :**

Les boucles sont des chemins fermés qui peuvent être empruntés sans croiser le même point plus d'une fois.

- **Trouver les Δ_i :**

A chaque chemin direct i correspond un Δ_i .

$\Delta_i = 1 -$ (Les boucles qui restent après élimination de la chaîne i). Si aucune n'est restée $\Delta_i = 1$.

- **Trouver Δ (fonction caractéristique) :**

$$\Delta = 1 - \sum (\text{Gains de boucles})$$

+ (Produit des gains de toutes les paires possibles e boucle ne se touchant pas)

- (Produit des gains de tous les triples possibles e boucle ne se touchant pas)

8.4 Exemple d'application

Trouver la fonction de transfert du système $G(s) = \frac{S(s)}{E(s)}$

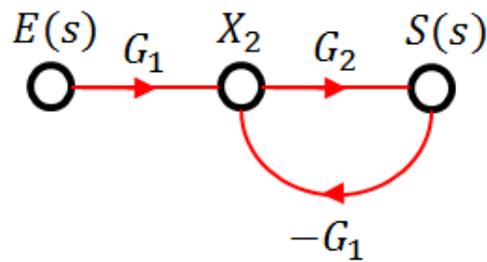


Figure III.31: Exemple d'un graphe de fluence à réduire

Nombre de boucles = 1

$$B_1 = -G_2(s) \cdot G_1(s)$$

$$\Delta = 1 - B_1 = 1 + G_2(s) \cdot G_1(s)$$

Nombre de chemin direct = 1

$$M_1 = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

$$\Delta_i = \Delta_1 = 1$$

$$G(s) = \frac{G_1(s) \cdot G_2(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s)}$$

Chapitre IV : Etudes temporelles des systèmes à temps continu

IV.1 Les systèmes à temps continu

Les systèmes à temps continu sont caractérisés par des signaux qui varient de manière continue dans le temps, par opposition aux systèmes à temps discret, dont les signaux varient uniquement à des instants discrets.

La réponse temporelle d'un système à une entrée spécifique qui se compose de deux parties: La réponse transitoire et la réponse en régime permanent. Pour un système stable, le régime commence par une étape transitoire pendant un temps dépendant de ses caractéristiques, puis passe dans un régime établi (permanent).

IV.2 Etude temporelle des systèmes à temps continu

La première étape de l'analyse d'un système consiste à décrire le système en termes d'un modèle mathématique. Auparavant, on a vu comment un système donné est modélisé en définissant sa fonction de transfert.

La connaissance des comportements des systèmes de premier et deuxième ordre est essentielle lorsqu'on souhaite commander un système. On compare fréquemment la courbe d'un système réel à ses deux types de systèmes équivalents. L'analyse de la réponse temporelle, peut être réalisée en utilisant des techniques d'analyse mathématique, telles que la transformée de Laplace, la réponse impulsionnelle, la réponse indicielle, etc.

En analysant la réponse temporelle d'un système, on peut évaluer sa capacité à répondre rapidement et précisément à une entrée donnée. La mesure de la performance du système permet également de déterminer si le système est capable de réguler efficacement sa sortie en fonction de la consigne.

Les mesures de temps de montée, de temps de réponse, de dépassement et de bande passante permettent d'évaluer la rapidité, la précision et la stabilité du système. Par exemple, un temps de montée court indique que le système peut répondre rapidement à une variation de l'entrée, tandis qu'un dépassement important indique une mauvaise régulation de la sortie.

IV.2.1 Etude temporelle d'un système de premier ordre

Réponse temporelle d'un système de premier ordre :

Considérons le système linéaire invariant dans le temps de premier ordre représenté par l'équation différentielle de premier ordre à coefficients constants de la forme :

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot e(t) \quad (\text{IV.1})$$

Où :

τ : Constante de temps.

K : Gain statique (ou le gain en régime permanent) $K = \frac{y(\infty)}{e(\infty)}$

En appliquant la transformation de Laplace sur l'équation (III.1) :

$$\tau \cdot S \cdot Y(s) + Y(s) = K \cdot E(s) \quad (\text{IV.2})$$

La fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{K}{1 + \tau s} \quad (\text{IV.3})$$

a) Réponse indicielle (réponse à un échelon)

Lorsque $e(t) = u(t)$ implique sa transformée de Laplace est $E(s) = \frac{1}{s}$:

La sortie a l'expression suivante dans le domaine de Laplace :

$$Y(s) = \frac{K}{s(1+\tau s)} \quad (\text{IV.4})$$

Une décomposition en éléments simples nous donne :

$$Y(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{(1+\tau s)} = \frac{K}{s} - \frac{K\tau}{(1+\tau s)} \quad (\text{IV.5})$$

On applique la transformée inverse pour trouver la réponse temporelle :

$$y(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (\text{IV.6})$$

La représentation graphique de la réponse indicielle d'un système de premier ordre est donnée par la figure ci-dessous :

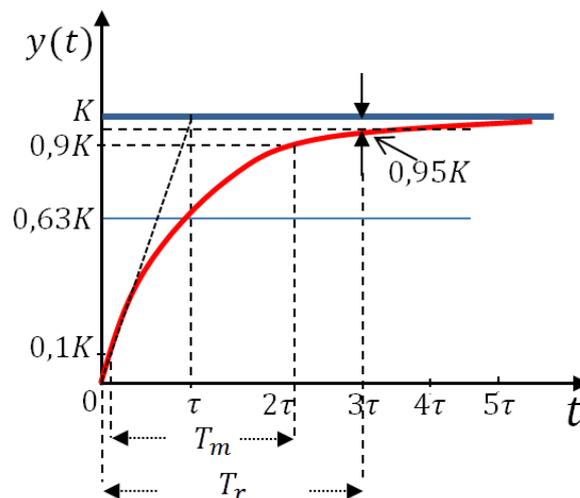


Figure IV.1: Réponse indicielle d'un système de premier ordre

➤ Le temps de réponse t_r :

Est le temps nécessaire pour que la sortie du système atteigne sa valeur finale asymptotique à 5 % près (les Anglo-Saxons utilisent couramment une référence à $\pm 2\%$).

Pour déterminer le temps de réponse d'un système de premier ordre, il suffit de trouver t_r dans lequel la sortie du système est égale à 95% de la valeur finale, tel que :

K : gain statique unitaire et A l'amplitude de l'entrée.

$$y(t_r) = K \left(1 - e^{-\frac{t_r}{\tau}}\right) = 0.95 \cdot A \cdot K \Rightarrow e^{-\frac{t_r}{\tau}} = 0,05 \quad (\text{IV.7})$$

$$t_r = -\tau \cdot \ln(0.05) \approx 3 \cdot \tau$$

➤ La constante de temps τ :

Est le temps nécessaire pour que la sortie du système passe de 10% à 90% de la valeur finale.

$$y(\tau) = 0.63 \cdot K \quad (\text{IV.8})$$

➤ Le temps de montée t_m :

Est le temps nécessaire pour que la sortie du système passe de 10% à 90% de la valeur finale pour un échelon d'entrée.

$$t_m = 2.2\tau \quad (\text{IV.9})$$

➤ **L'erreur statique ε_s :**

Si le système est stable, on appelle l'erreur statique (ou l'erreur de position), la différence que l'on relève sur une réponse indicielle entre l'entrée et la sortie d'un système lorsque $t \rightarrow \infty$. Pour un système du premier ordre, on peut calculer l'erreur statique comme suit :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [e(t) - y(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} [E(p) - Y(p)] = A(1 - K) \quad (\text{IV.10})$$

b) Réponse impulsionnelle (réponse à un Dirac)

Lorsque $e(t) = \delta(t)$ implique sa transformée de Laplace est $E(s) = 1$:

La sortie a l'expression suivante dans le domaine de Laplace :

$$Y(s) = \frac{K}{1 + \tau s} = \frac{\frac{K}{\tau}}{\frac{1}{\tau} + s} \quad (\text{IV.11})$$

On applique la transformée inverse pour trouver la réponse temporelle:

$$y(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\text{IV.12})$$

La représentation graphique de la réponse impulsionnelle d'un système de premier ordre est donnée par la figure ci-dessous :

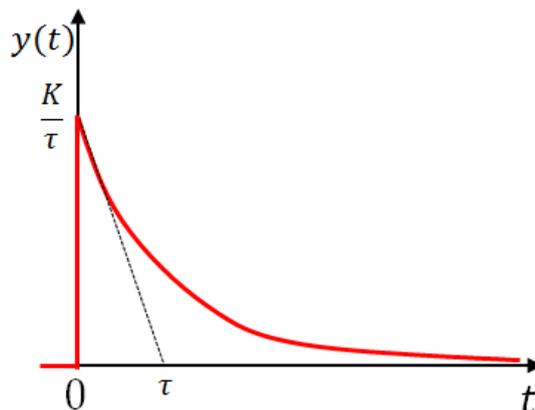


Figure IV.2: Réponse impulsionnelle d'un système de premier ordre.

c) Réponse à une rampe

Lorsque $e(t) = t$ implique sa transformée de Laplace est $E(s) = \frac{1}{s^2}$:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{K}{1 + \tau s} \quad (\text{IV.13})$$

$$Y(s) = \frac{K}{\tau} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\tau} + s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{K}{s^2} - \frac{K \cdot \tau}{s} + \frac{K \cdot \tau}{1 + \tau \cdot s}$$

On applique la transformée inverse pour trouver la réponse temporelle:

$$y(t) = K \left(t - \tau + \tau \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (\text{IV.14})$$

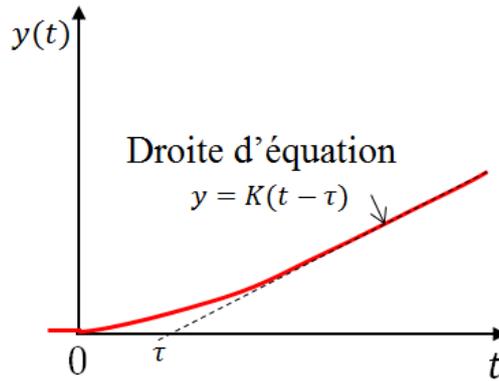


Figure IV.3: Réponse à une rampe pour un système de premier ordre.

IV.2.2 Etude temporelle d'un système du second ordre

Considérons le système linéaire invariant dans le temps de deuxième ordre représenté par l'équation différentielle de deuxième ordre à coefficients constants de la forme :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot e(t) \quad (\text{IV.15})$$

K : Gain statique (ou le gain en régime permanent est généralement $K > 0$) $K = \frac{y(\infty)}{e(\infty)}$

ω_0 : Pulsation naturelle ou pulsation propre non amortie ($\omega_0 > 0$).

ξ : Facteur d'amortissement, ($\xi > 0$ si le système est stable)

En appliquant la transformation de Laplace sur l'équation (III.11) :

$$\frac{s^2}{\omega_0^2} Y(s) + \frac{2\xi \cdot s}{\omega_0} Y(s) + Y(s) = K \cdot E(s) \quad (\text{IV.16})$$

La fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi \cdot s}{\omega_0} + 1} = \frac{K \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2\xi \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2} \quad (\text{IV.17})$$

Les pôles de $G(s)$ sont déterminés par le calcul du discriminant réduit des polynômes dénominateur : $S^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot S + 1$

$$\Delta = \omega_0^2 (\xi - 1) \quad (\text{IV.18})$$

a) Réponse indicielle d'un système du second ordre

Lorsque $e(t) = u(t)$ implique sa transformée de Laplace est $E(s) = \frac{1}{s}$:

$$Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{K \cdot \omega_0^2}{s \cdot (s^2 + 2\xi \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2)} \quad (\text{IV.19})$$

Le calcul de la sortie $y(t)$ dépend de la valeur de l'intervalle de ξ et on trouve trois solutions :

➤ **On a le régime amorti (apériodique):** $\Delta > 0 \Leftrightarrow \xi > 1$, $\Delta = \omega_0^2 (\xi - 1) > 0$

Le dénominateur possède deux racines réelles :

$$s_{1,2} = -\xi \omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$y(t) = K \cdot u(t) - \frac{K}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left[\begin{array}{l} (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot e^{-\omega_0(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot t} \\ - (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot e^{-\omega_0(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot t} \end{array} \right] \quad (\text{IV.20})$$

La Figure IV.4, montre que le signal de sortie $y(t)$ dans l'équation (III.20) devient de plus en plus lent vers son asymptote K lorsque ξ est grand.

- **Le temps de réponse t_r à 5%** : il n'y pas a de formule simple.
- **Le temps de montée (t_m)** : $t_r = t_{90\%} - t_{10\%}$

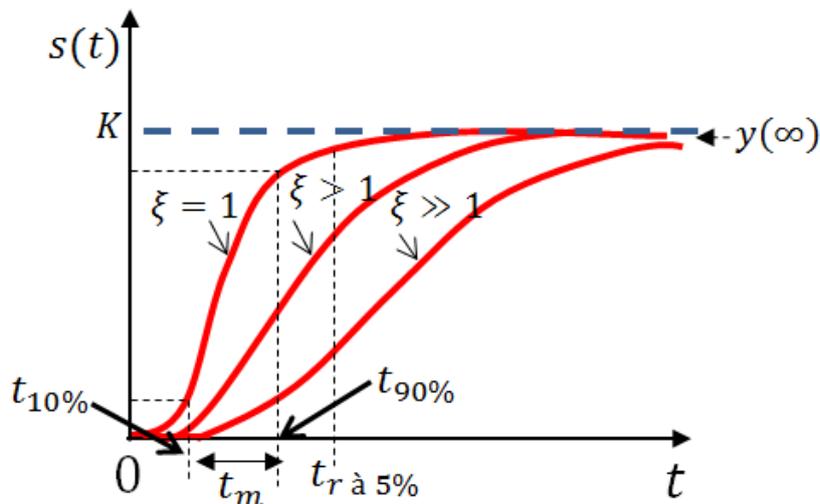


Figure IV.4 : Réponse indicielle d'un système de deuxième ordre à $\xi > 1$

- **On a le régime critique (régime apériodique critique):** $\Delta = 0 \Leftrightarrow \xi = 1$, le dénominateur possède donc une racine double réelle, $s_1 = s_2 = -\omega_0$

La réponse temporelle a donc pour l'expression suivante :

$$y(t) = K[1 - (1 + \omega_0 \cdot t) \cdot e^{-\omega_0 \cdot t}] \quad (\text{IV.21})$$

D'après le cas précédent, on remarque que le signal de sortie $y(t)$ tend très rapidement vers l'asymptote K lorsque $\xi = 1$.

- **Le temps de réponse t_r à 5%** : il n'y a pas de formule simple.

Le temps de réponse (t_r) : $t_r = \frac{6 \cdot \xi}{\omega_0}$

- On a le régime oscillatoire amorti: $\Delta < 0 \Leftrightarrow 0 < \xi < 1$, Le dénominateur possède deux racines complexes conjuguées :

$$s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$$

On obtient cette fois :

$$y(t) = K \left[1 - e^{-\omega_0 \cdot t} \left[\cos \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t \right] \right] \quad (IV.22)$$

Ou encore :

$$y(t) = K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot e^{-\xi \cdot \omega_0 \cdot t} \left[\sin \left(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t + \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right) \right] \right] \quad (IV.23)$$

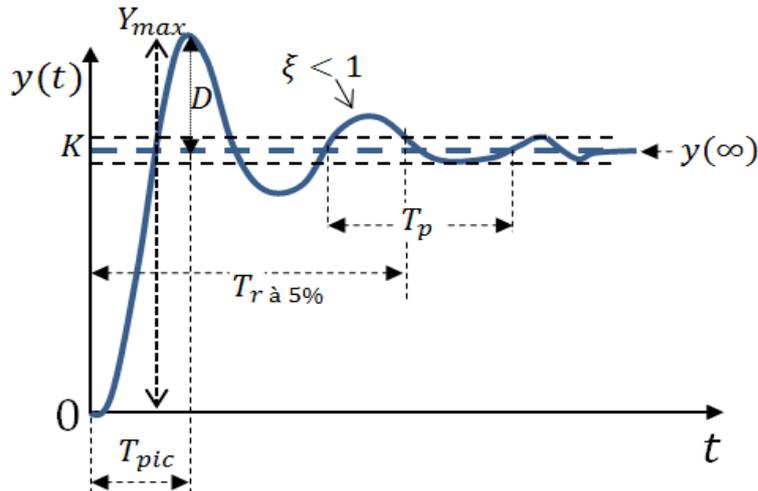


Figure IV.5 : Réponse indicielle d'un système de deuxième ordre à $\xi < 1$

Régime oscillatoire amorti : Dans le cas du régime oscillatoire amorti, la pulsation du signal sinusoïdal enveloppé par l'exponentielle décroissante a pour expression :

➤ **La pseudo-pulsation :**

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \quad (IV.24)$$

Elle est appelée pseudo-pulsation du régime oscillatoire amortie. Elle est toujours inférieure à la pulsation ω_0 .

➤ **La pseudo-période :** est défini par

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (IV.25)$$

La pseudo-période est le temps nécessaire à une alternance complète d'une sinusoïde amortie. Elle devient plus grande lorsque ξ est proche de 1.

➤ **Le temps de pic:** est défini par

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_p} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (IV.26)$$

Remarque : Le cas où la pulsation ω_0 est faible, la période des oscillations T_p et la réponse du système deviennent lentes.

➤ **Le premier dépassement en pourcent ($D_1\%$) :**

$$D_1\% = 100 e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} \quad \text{ou} \quad D = \frac{Y_{max} - y(\infty)}{y(\infty)} \quad (IV.27)$$

➤ **Le temps de montée (t_m) :**

Est le temps que met le signal de sortie à franchir pour la première fois la droite de la valeur finale $y(t) = K$.

$$t_m = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}} \cdot (\pi - \arccos \xi) \quad (\text{IV.28})$$

Le temps de montée (t_r à $n\%$) :

C'est le temps au bout duquel la réponse indicielle $\pm n\%$ de la valeur finale. On mesure par :

$$t_r \text{ à } n\% \approx \frac{1}{\xi \omega_0} \ln \frac{100}{n} \quad (\xi < 0.7) \quad (\text{IV.29})$$

$$t_r \text{ à } 5\% \approx \frac{3}{\xi \omega_0}$$

b) Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre

Lorsque $e(t) = \delta(t)$ implique sa transformée de Laplace est $E(s) = 1$:

La sortie a l'expression suivante dans le domaine de Laplace :

$$Y(s) = G(s) \cdot E(s) = \frac{K \cdot \omega_0^2}{(s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2)} \quad (\text{IV.30})$$

Le calcul de la sortie $y(t)$ dépend de la valeur de l'intervalle de ξ et on trouve trois solutions :

- **On a le régime amorti (apériodique):** $\Delta > 0 \Leftrightarrow \xi > 1$, le dénominateur possède deux racines réelles :

$$s_{1,2} = \omega_0 (-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}) < 0 \quad (\text{IV.31})$$

$Y(s)$ se décompose en deux éléments simples :

$$Y(s) = \frac{K \cdot \omega_0^2}{(s-s_1) \cdot (s-s_2)} = \frac{a}{(s-s_1)} + \frac{b}{(s-s_2)} \quad (\text{IV.32})$$

Après identification, on trouve :

$$a = -b = \frac{K \cdot \omega_0}{2 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} \quad (\text{IV.33})$$

La réponse temporelle a donc pour l'expression suivante :

$$y(t) = \frac{K \cdot \omega_0}{2 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} (e^{s_1 \cdot t} - e^{s_2 \cdot t}) \quad (\text{IV.34})$$

La Figure IV.6, montre que le signal de sortie $y(t)$ dans l'équation (IV.33)

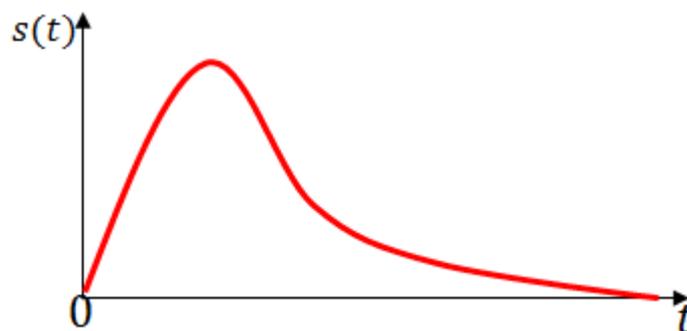


Figure IV.6: Réponse impulsionnelle d'un système de second ordre ($\xi > 1$)

➤ **On a le régime critique (régime apériodique critique): $\Delta = 0 \Leftrightarrow \xi = 1$**

La sortie dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$Y(s) = \frac{K \cdot \omega_0^2}{(s + \omega_0)^2} \quad (\text{IV.34})$$

La réponse temporelle a donc pour l'expression suivante :

$$y(t) = K \cdot \omega_0^2 \cdot e^{-\omega_0 \cdot t} t \quad (\text{IV.36})$$

Le signal de sortie $y(t)$ dans l'équation (IV.36) a la même allure de la courbe pour $\xi > 1$.

L'amplitude maximale est de $y(t_{max}) = \frac{K \cdot \omega_0}{e}$, elle est atteinte à l'instant $t_{max} = \frac{1}{\omega_0}$

➤ **On a le régime oscillatoire sous amorti: $\Delta < 0 \Leftrightarrow 0 < \xi < 1$** , le dénominateur possède deux racines complexes conjuguées :

$$s_{1,2} = \omega_0(-\xi \pm \sqrt{1 - \xi^2}) < 0 \quad (\text{IV.37})$$

La réponse temporelle a donc pour l'expression suivante :

$$y(t) = \frac{K \cdot \omega_0}{2 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} (e^{s_1 \cdot t} - e^{s_2 \cdot t}) \quad (\text{IV.38})$$

Après le développement des exponentielles complexes :

$$y(t) = \frac{K \cdot \omega_0}{2 \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} (e^{\omega_0 \cdot \xi \cdot t}) \cdot \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) \quad (\text{IV.39})$$

La Figure IV.7, montre que le signal de sortie $y(t)$ dans l'équation (IV.39)

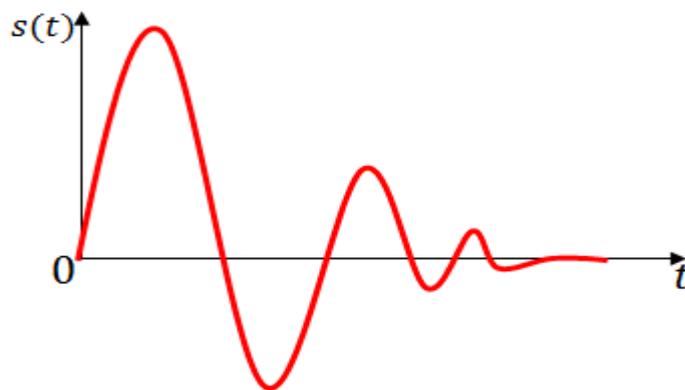


Figure IV.7: Réponse impulsionnelle d'un système de second ordre ($0 < \xi < 1$)

On peut remarquer que le signal (IV.39) est oscillant (à cause de $\sin(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t)$) et amorti de ($e^{\omega_0 \cdot \xi \cdot t}$).

On note que :

➤ **La pulsation propre amortie** du système :

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \quad (\text{IV.40})$$

➤ **La période de ces pseudos oscillations** est :

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} \quad (\text{IV.41})$$

Chapitre V : Etude harmonique des systèmes à temps continu

V.1 Réponse harmonique

La réponse harmonique (dite réponse fréquentielle) d'un système linéaire est sa réponse à une excitation d'entrée $e(t)$ sinusoïdale permanente dont on fait varier la pulsation $\omega = 2\pi f$.

$$e(t) = e_0 \cdot \sin(\omega t) \tag{V.1}$$

La sortie en régime permanent est aussi une sinusoïde de même pulsation (ω), d'amplitude s_0 et d'une déphasée d'un angle φ par rapport à l'entrée $e(t)$ d'amplitude e_0 :

$$s(t) = s_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) \tag{V.2}$$

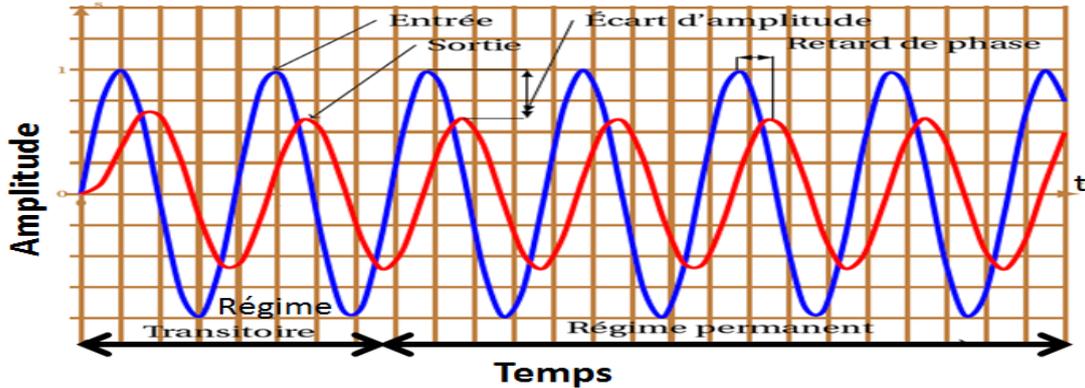


Figure V.1: La réponse fréquentielle

Il en est de même pour l'entrée : $e(t) = e_0 \cdot \cos(\omega t)$

De même, depuis l'entrée : $e(t) = e_0 \cos(\omega t) + j \cdot e_0 \sin(\omega t) = e_0 \cdot e^{j\omega t}$

Le théorème de superposition nous fournit le résultat suivant:

$$s(t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi) + j \cdot s_0 \sin(\omega t + \varphi) = s_0 \cdot e^{j\omega t + \varphi} \tag{V.3}$$

e_0 et s_0 : Sont des amplitudes maximales des signaux sinusoïdaux d'entrée et de sortie à la fréquence ω .

L'entrée du type $e_0 \cdot e^{j\omega t}$ est capable de délivrer une sortie de la forme $s_0 \cdot e^{j\omega t + \varphi}$. Avec cette entrée l'équation différentielle suivante doit être mise à jour;

$$a_n \cdot \frac{ds^n(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{ds^{n-1}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 \cdot s(t) = b_m \cdot \frac{de^m(t)}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{de^{m-1}(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 \cdot e(t) \tag{V.4}$$

Dans le domaine fréquentielle, on peut obtenir d'une fonction de transfert en substituant l'opérateur de Laplace par le nombre complexe ($s = j\omega$), alors :

$$\left[a_n \cdot (j\omega)^n + a_{n-1} \cdot (j\omega)^{n-1} + \dots + a_0 \cdot (j\omega)^0 \right] \cdot s_0 \cdot e^{j\omega t + \varphi} = \left[b_m \cdot (j\omega)^m + b_{m-1} \cdot (j\omega)^{m-1} + \dots + b_0 \cdot (j\omega)^0 \right] \cdot e_0 \cdot e^{j\omega t} \tag{V.5}$$

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{s_0}{e_0} e^{j\varphi} = G(\omega) \cdot e^{j\varphi}$$

On note que la réponse fréquentielle d'une fonction de transfert $H(j\omega)$ est caractérisée par:

- **Un gain** $G(\omega) = \frac{s_0}{e_0} = |H(j\omega)|$ est le gain en amplitude (module) de la fonction $H(s)$.
- **Une phase** $\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = \angle H(j\omega)$ est l'argument de la fonction $H(s)$.

V.2 Interprétation dans le plan complexe

La Figure V.2 illustre le plan complexe utilisé pour calculer le module et le déphasage.

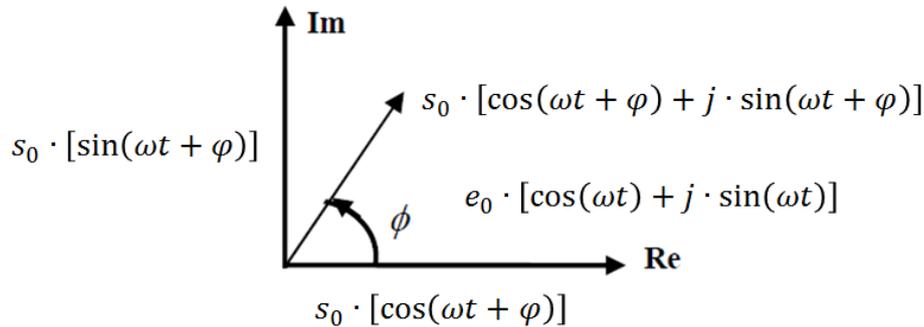


Figure V.2: Plan complexe

En conséquence, nous pouvons obtenir le gain $G(\omega)$ en prenant le module du nombre complexe $H(j\omega)$ et le déphasage $\varphi(\omega)$ en cherchant l'angle φ par l'expression suivante:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

$$\begin{cases} G(\omega) = \sqrt{H(j\omega) \cdot H^*(j, \omega)} \\ \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{Im}(H(j, \omega))}{\operatorname{Re} H(j, \omega)} \right) \end{cases} \quad (\text{V.6})$$

V.3 Représentations graphiques des réponses fréquentielles

Trois représentations graphiques, souvent appelées des lieux de transfert ou des diagrammes des réponses en fréquence $G(\omega)$ d'un système. Il s'agit des diagrammes de Bode, de Nyquist et Black-Nichols (ou Black).

V.3.1 Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode d'une fonction de transfert est représenté par deux courbes :

- Diagramme de gain est exprimé en décibels (dB),

$$A_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} |H(j\omega)| \quad (\text{V.7})$$

- Diagramme de phase est exprimé en degré ($^\circ$) ou radian en fonction de la pulsation ω en échelle logarithmique décimale (rad/s).

$$\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) \quad (\text{V.8})$$

- On appelle décade l'intervalle de pulsation qui existe entre ω et 10ω .
- On appelle octave l'intervalle de pulsation qui existe entre ω et 2ω .

V.3.1.1 Diagramme asymptotique

On appelle diagramme asymptotique d'une fonction de transfert l'ensemble des asymptotes à la courbe quand $\omega \rightarrow 0$ et quand $\omega \rightarrow \infty$. Il est inutile de tracer intégralement la courbe de Bode (point par point). On peut se contenter des asymptotes. Les points d'intersection de ces asymptotes entre elles sont appelés points de cassure.

Etant donné l'utilisation des logarithmes comme échelle, la précision est suffisante pour permettre d'approcher la courbe jusqu'à ses asymptotes, à l'exception du voisinage des points

de cassure. Si la courbe de gain peut être avantageusement remplacée par ses asymptotes, il n'en est pas de même pour la courbe de phase, qui est beaucoup éloignée.

V.3.1.2 Bande passante

La bande passante est la plage de pulsations ou de fréquences pour laquelle le signal de sortie subit un affaiblissement égal à sa valeur à $\omega = 0$. On fait donc intervenir la pulsation de coupure à 0 dB.

V.3.1.3 Exemples d'applications

On représente le diagramme de Bode des systèmes sous forme générale du 1^{er} et 2^{ème} ordre:

a) Système de 1^{er} ordre

Considérons la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{S(s)}{E(s)} = \frac{K}{1+\tau \cdot s} \quad (\text{V.9})$$

On peut obtenir la fonction complexe $H(j\omega)$ en remplaçant simplement $s = j\omega$ et la fonction devient :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1+\tau \cdot j\omega} \quad (\text{V.10})$$

La séparation des deux parties réelles et imaginaires se fait par la multiplication du numérateur et du dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur par $(1 - \tau \cdot j\omega)$:

$$H(j\omega) = \frac{K \cdot (1 - \tau \cdot j\omega)}{(1 + \tau \cdot j\omega) \cdot (1 - \tau \cdot j\omega)} = \frac{K - K \cdot \tau \cdot j\omega}{1 + (\tau \cdot \omega)^2} \quad (\text{V.11})$$

Afin de calculer l'amplitude et la phase de la fonction de transfert, celles-ci sont divisées en deux parties, réelle et imaginaire.

$$H(j\omega) = \frac{K}{(1 + \tau^2 \cdot \omega^2)} - j \frac{K \cdot \tau \cdot \omega}{(1 + \tau^2 \cdot \omega^2)} \quad (\text{V.12})$$

– Le gain : $G(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{K}{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{K \cdot \tau \cdot \omega}{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}\right)^2} = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}}$

– La phase : $\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = -\frac{\left(\frac{K \cdot \tau \cdot \omega}{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}\right)}{\frac{K}{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}} = -\tau \cdot \omega \Rightarrow \varphi = -\arctan(\tau \cdot \omega)$

Diagramme de gain et de phase

➤ Lorsque $\omega \rightarrow 0$

- $\lim_{\omega \rightarrow 0} G_{dB}(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} 20 \cdot \log |H(j\omega)|$
 $= \lim_{\omega \rightarrow 0} 20 \cdot \log \left(\frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}}\right) = 20 \cdot \log K = \text{constant, c'est-à-dire}$
 vers une droite de pente (0)
- $\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} -\arctan(\tau \cdot \omega) = 0$

➤ Lorsque $\omega \rightarrow \infty$

- $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G_{dB}(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} 20 \cdot \log |H(j\omega)| = 20 \cdot \log \frac{K}{\tau \omega} = 20 \cdot \log \frac{K}{\tau} - 20 \cdot \log \omega$

Asymptote oblique : le gain de -20 dB par décade, c'est-à-dire vers une asymptote de pente (-1).

- $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} -\arctan(\tau \cdot \omega) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} = -90^\circ$

➤ Pour $\omega = \omega_c = \frac{1}{\tau}$ est la pulsation de coupure.

Le diagramme réel est différent du diagramme asymptotique. Les asymptotes se croisent pour la pulsation de coupure, l'écart par rapport au point d'intersection des asymptotes est de -3dB. Pulsation de cassure : -45° .

$$G_{dB}(\omega_c) = 20 \cdot \log|H(j \cdot \omega_c)| = 20 \cdot \log \frac{K}{\sqrt{2}} = 20 \log(K) - 20 \cdot \log\sqrt{2} \tag{V.13}$$

$$\varphi(\omega_c) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4} \text{ rad} = -45^\circ$$

pour les pulsations double $2 \cdot \omega_c$ et moitié $\omega_c/2$ l'écart est de -1dB par rapport aux asymptotes.

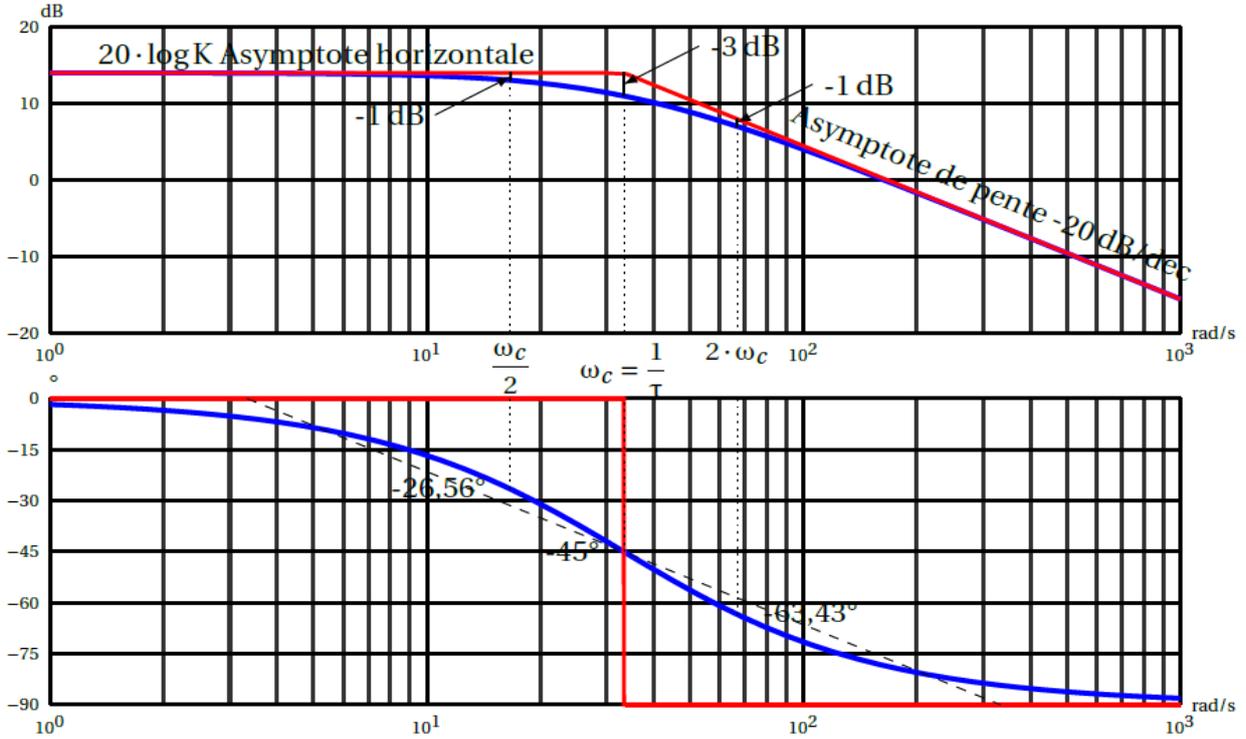


Figure V.3: Diagramme de Bode d'un système de premier ordre

b) Système de 2^{ème} ordre

Considérons la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{S(s)}{E(s)} = \frac{K \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2} \tag{V.14}$$

On peut obtenir la fonction complexe $H(j\omega)$ en remplaçant simplement $s = j\omega$ et la fonction devient :

$$H(j \cdot \omega) = \frac{K \cdot \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2 \cdot j \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot \omega} \tag{V.15}$$

$$\begin{cases} G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{K \cdot \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot \omega)^2}} \\ \varphi(\omega) = -\arg[(\omega_0^2 - \omega^2) + (2 \cdot j \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot \omega)] = -\frac{\arctan(2 \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot \omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \end{cases} \tag{V.16}$$

Avec : $\varphi \in [-\pi, 0]$ car $2 \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot \omega > 0$

- Lorsque $\omega \rightarrow 0$: $G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log K$, une asymptote horizontale.
- Lorsque $\omega \rightarrow \infty$: $G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log K - 20 \cdot \log \omega^2 = 20 \cdot \log K - 40 \cdot \log \omega$, c'est une pente de -40dB/déc.

- Si $\xi < \sqrt{2}/2$ (faiblement amorti), alors la dérivée du dénominateur de G s'annule pour $\omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2}$. Par conséquent, il y a un maximum en ω_r (également connu sous le nom de la pulsation de résonance):

$$G_{dB}(\omega_r) = 20 \cdot \log \frac{K}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (V.17)$$

Le coefficient de résonance (surtension) est calculé par $Q = \frac{|H(j \cdot \omega_c)|}{|H(0)|}$ ou encore ;

$$Q_{db} = 20 \cdot \log(|H(j \cdot \omega_c)|) - 20 \cdot \log(|H(0)|) \quad (V.18)$$

- Si $\xi > \sqrt{2}/2$ (fortement amorti), il n'y a pas de sommet. Lorsque les deux pôles sont réels, la fonction de transfert peut se mettre sous la forme :

$$H(j \cdot \omega) = \frac{K}{(1 + j \cdot T_1 \omega) \cdot (1 + j \cdot T_2 \omega)} \quad (V.19)$$

Avec par exemple $T_2 < T_1$ ($\omega_2 > \omega_1$)

La fonction de transfert est la multiplication de deux premiers ordres d'où :

$$G_{dB}(dB) = 20 \cdot \log K - 20 \cdot \log(|1 + j \cdot T_1 \cdot \omega|) - 20 \cdot \log(|1 + j \cdot T_2 \cdot \omega|) \quad (V.20)$$

Première pente à -20dB/déc Seconde pente à -20dB/déc

- Phase :

$$\varphi(\omega) = \arg(H(j \cdot \omega)) = -\arctg(T_1 \cdot \omega) - \arctg(T_2 \cdot \omega) \quad (V.21)$$

- Lorsque $\omega \rightarrow 0$: $G(\varphi) = 0$
- Lorsque $\omega \rightarrow \infty$: $G(\varphi) = -\pi$

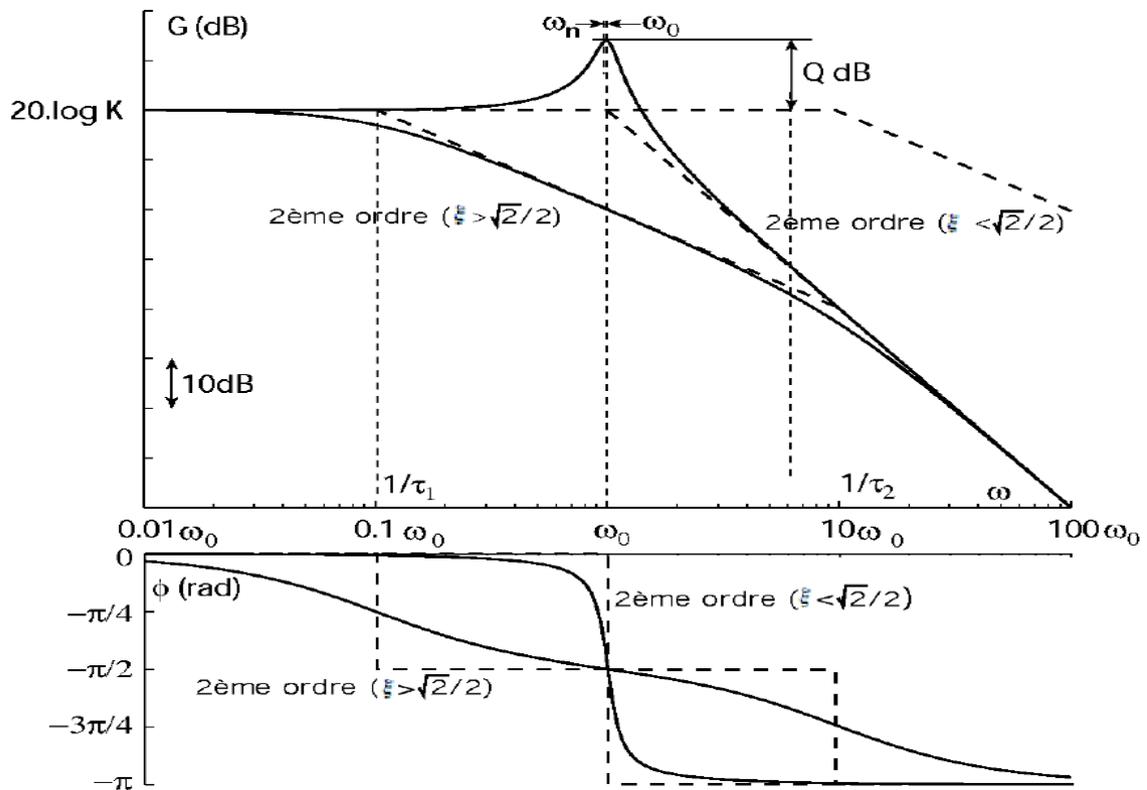


Figure V.4: Diagramme de Bode d'un système de second ordre

V.3.1.4 Diagramme de Bode généralisé

Après avoir décomposé en produits un système du premier et second ordre, intégration, dérivation, appelés fonctions élémentaires, il est facile de tracer la réponse asymptotique d'un système d'ordre N . Les réponses de chaque fonction élémentaire sont présentées sur la Figure V.5.

$$H(s) = \frac{K \prod(1+\tau_i s) \cdot \prod(1+2\xi_j s/\omega_{0j} + s^2/\omega_{0j}^2)}{s^\alpha \prod(1+\tau_k s) \cdot \prod(1+2\xi_l s/\omega_{0l} + s^2/\omega_{0l}^2)} \quad (V.22)$$

La réponse harmonique de la fonction de transfert $H(s)$ est la multiplication des réponses élémentaires ce qui se traduit par une somme dans le diagramme de Bode.

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot H_3(s) \cdot \dots \cdot H_N(s) \quad (V.23)$$

Cela nous permet d'écrire le module et l'argument en dB :

➤ Module en dB :

$$|H(j.\omega)|_{dB} = 20 \log(|H_1(j.\omega)|) + 20 \log(|H_2(j.\omega)|) + \dots + 20 \log(|H_N(j.\omega)|) \quad (V.24)$$

➤ L'argument :

$$Arg(H(j.\omega)) = Arg(H_1(j.\omega)) + Arg(H_2(j.\omega)) + \dots + Arg(H_N(j.\omega)) \quad (V.25)$$

Ainsi, les diagrammes de Bode de la Fonction de transfert sont obtenus en sommant graphiquement les diagrammes de chaque fonction élémentaire.

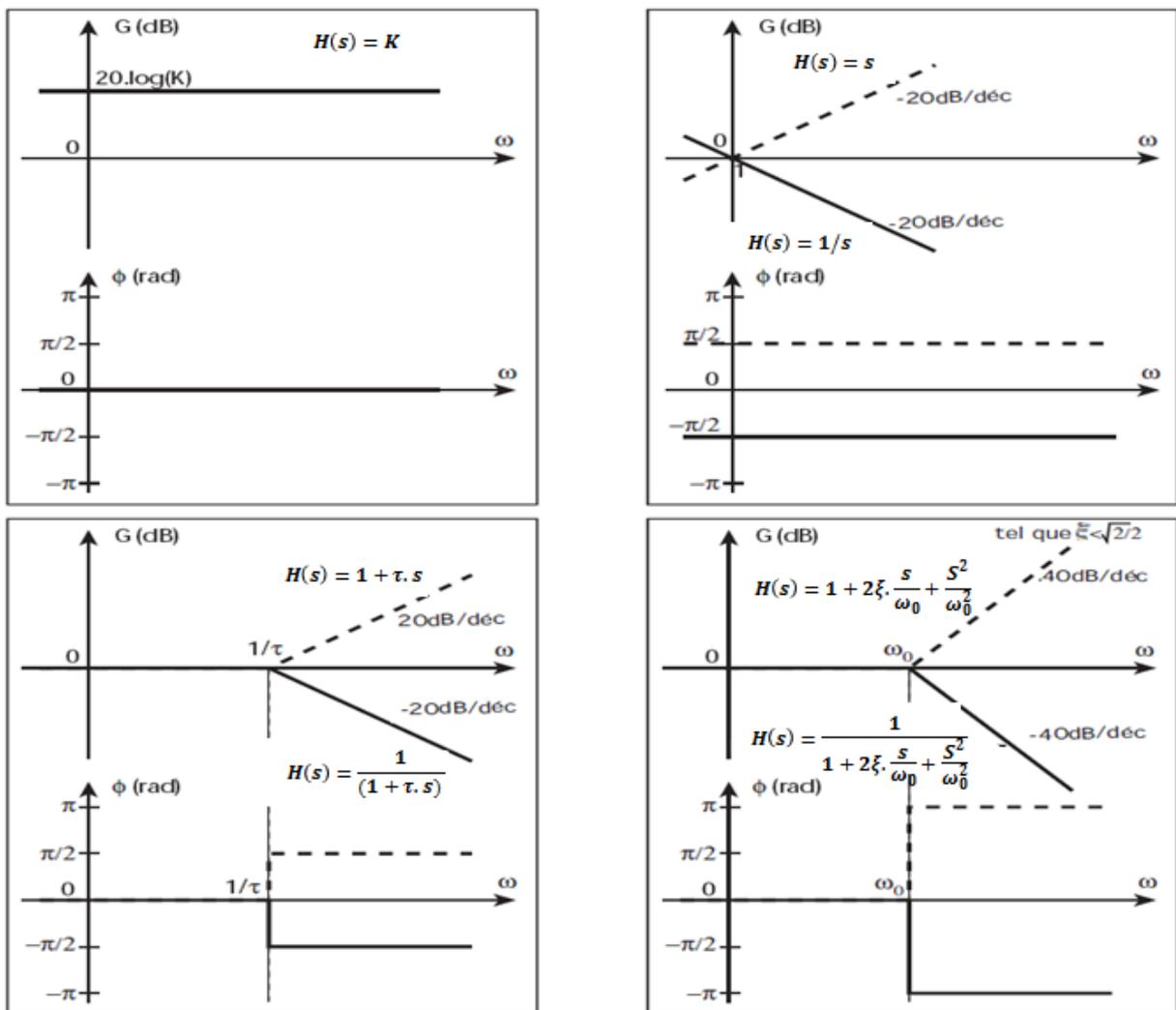


Figure V.5: Diagrammes de Bode asymptotiques des fonctions élémentaires

V.3.2 Diagramme de Nyquist

Les courbes de gain et de phase ne sont pas les seuls constituants viables du comportement harmonique d'un système d'une fonction de transfert $H(s)$. Une autre représentation consiste à décomposer la fonction de transfert en sa partie réelle et imaginaire.

$$H(s) = Re(\omega) + jIm(\omega)$$

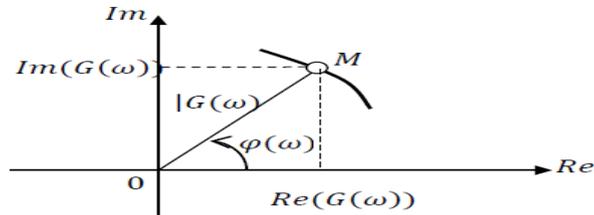


Figure V.6: Définition du diagramme de Nyquist

Nyquist utilise cette formulation pour représenter la réponse harmonique d'un système donné par sa fonction de transfert.

Le lieu de Nyquist est le tracé des points de la courbe polaire des points M de coordonnées $H(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$.

- En rayon : le gain en échelle linéaire
- En angle : la phase en degrés

V.3.2.1 Exemples d'applications

On représente le diagramme de Nyquist des systèmes sous forme générale du 1^{er} et 2^{ème} ordre:

a) Système de 1^{er} ordre

Considérons l'exemple précédent du premier ordre :

$$H(s) = \frac{S(s)}{E(s)} = \frac{K}{1+\tau \cdot s} \tag{V.26}$$

Pour établir le lieu de Nyquist, on remplace s par j dans $H(s)$ et on décompose $G(j\omega)$ en une partie réelle et une partie imaginaire.

$$H(j \cdot \omega) = \frac{K}{(1 + \tau^2 \cdot \omega^2)} - j \frac{K \cdot \tau \cdot \omega}{(1 + \tau^2 \cdot \omega^2)} \tag{V.27}$$

$$Re(H(j \cdot \omega)) = \frac{K}{(1 + \tau^2 \cdot \omega^2)} \tag{V.28}$$

$$Im(H(j \cdot \omega)) = -j \frac{K \cdot \tau \cdot \omega}{(1 + \tau^2 \cdot \omega^2)}$$

Le module représente le rayon polaire :

$$G(\omega) = |H(j \cdot \omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}} \tag{V.29}$$

Argument est l'angle polaire :

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\tau \cdot \omega)$$

- Lorsque $\omega \rightarrow 0$: $|H(0)| = K$, $\varphi(0) = 0^\circ$
- Lorsque $\omega \rightarrow \infty$: $|H(\infty)| = 0$, $\varphi(\infty) = -90^\circ$
- Pour $\omega = \omega_c = \frac{1}{\tau}$ est la pulsation de coupure, $|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{2}}$, $arg(H(j\omega)) = -\frac{\pi}{4}$

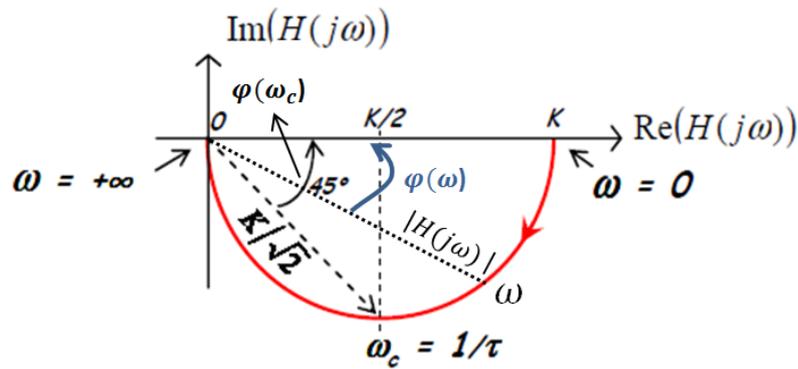


Figure V.7: Diagramme de Nyquist de 1^{er} ordre

Le diagramme de Nyquist (lieu complet) correspond à ω variant de $-\infty$ à $+\infty$. Il s'obtient par symétrie par rapport à l'axe réel du lieu de Nyquist.

b) Système de 2^{ème} ordre

Considérons l'exemple précédent de second ordre:

$$H(s) = \frac{S(s)}{E(s)} = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot s + 1} \quad (V.30)$$

Partie réelle :

$$Re(\omega) = \frac{K \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}{\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\right)^2 + \left(2 \cdot \xi \cdot \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad Re(\omega \geq 0) \quad (V.31)$$

Partie imaginaire :

$$Im(\omega) = - \frac{2 \cdot K \cdot \xi \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\right)^2 + \left(2 \cdot \xi \cdot \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad Im(\omega \leq 0) \quad (V.32)$$

Sur la Figure V.8, le lieu de Nyquist est toujours placé dans le demi-plan des imaginaires négatifs, et l'allure générale dépend de la valeur du coefficient d'amortissement ξ :

$\xi \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$: Le module est alors toujours inférieur à K, le lieu est donc compris dans le demi-cercle de centre (0,0) et de rayon K;

$\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$: Le module présente un maximum pour la pulsation de résonance, $\omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$

- Lorsque $\omega \rightarrow 0$: Nyquist démarre pour du point (K,0) ;
- Lorsque $\omega \rightarrow \infty$: La courbe tend vers l'origine (0,0) avec une demi tangente de -180°;
 - Le lieu doit être gradué et orienté dans le sens des ω croissants ;
 - la pulsation propre ω_0 se trouve à l'intersection du lieu de Nyquist avec l'axe des imaginaires (le déphasage est de -90°) ;

$\xi \gg 1$: Le lieu de Nyquist de second ordre tend vers le lieu d'un système du premier ordre (cercle de centre $\left(\frac{K}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{K}{2}$).

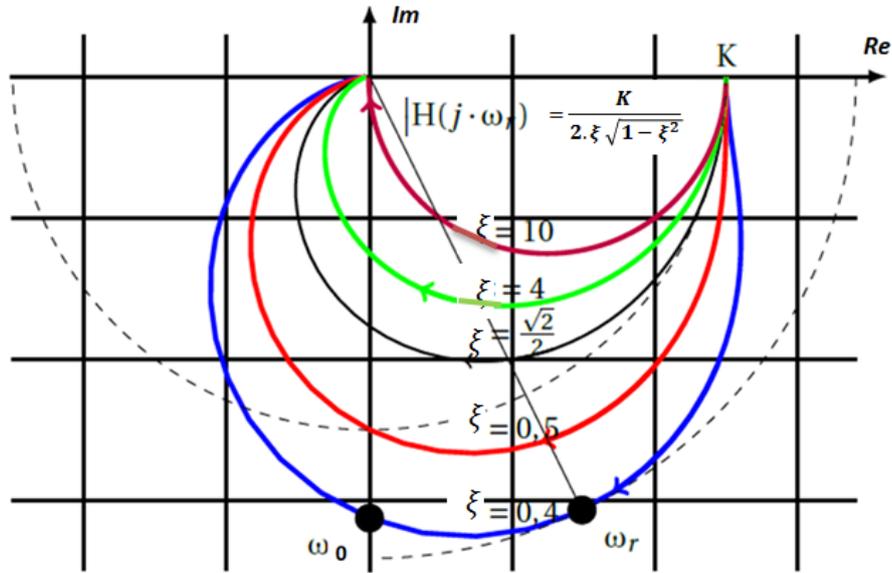


Figure V.8: Diagramme de Nyquist de 2^{ème} ordre

V.3.2.2 Diagramme de Nyquist généralisé

Contrairement au diagramme de Bode, on ne peut pas généraliser le tracé du lieu Nyquist à partir de la fonction de transfert, on peut seulement déduire l’allure du diagramme lorsque $\omega \rightarrow \infty$.

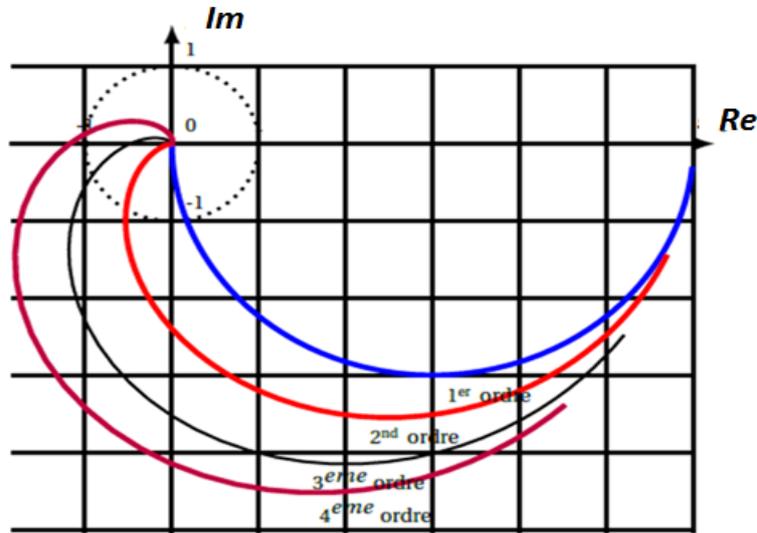


Figure V.9: Diagramme de Nyquist généralisé

Alors :

- Le module de cette fonction de transfert tend vers 0 lorsque $\omega \rightarrow 0$, le lieu de Nyquist tend donc asymptotiquement vers l’origine ;
- La demi-tangente à l’origine peut se déduire du diagramme de Bode à partir de l’argument de la fonction de transfert :

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg(H(j.\omega)) = (n - m - \alpha).90^0 \tag{V.33}$$

V.3.3 Le diagramme de Black-Nichols (ou Black)

Le diagramme de Black d'une fonction de transfert est une représentation équivalente à celle de Bode, mais tracée dans un seul diagramme, lorsque ω varie de 0 à $+\infty$, alors chaque point du diagramme correspondant à une pulsation.

- Abscisse: l'argument (ou la phase) en degré ou radian.
- Ordonnée: le module (ou le gain) en décibel (dB).

V.3.3.1 Exemples d'applications

On représente le diagramme de Black des systèmes sous forme générale du 1^{er} et 2^{ème} ordre:

a) Système de 1^{er} ordre :

Considérons la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{S(s)}{E(s)} = \frac{K}{1 + \tau \cdot s} \quad (\text{V. 34})$$

– Le module en dB : $G_{dB}(\omega) = 20 \log \left(\frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}} \right)$

– L'argument : $\varphi = -\arctan(\tau \cdot \omega)$

Le diagramme de Black-Nichols est tracé point par point, en indiquant le module et l'argument pour chaque pulsation ω . Pour être utile, le lieu de Black doit être gradué et orienté en pulsation. Les points caractéristiques définis pour un premier ordre peuvent être trouvés sur le tracé.

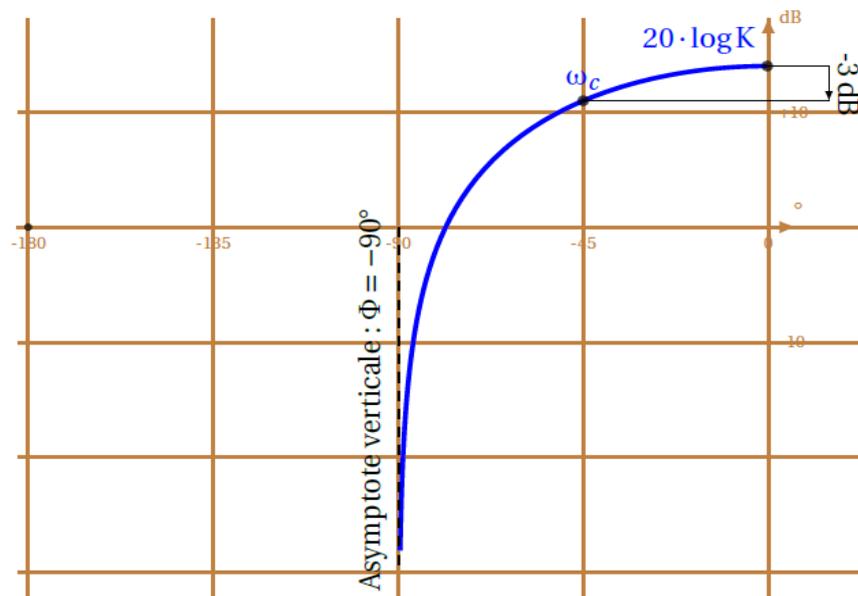


Figure V.10: Diagramme de Black-Nichols de 1^{er} ordre

Pour $\omega \rightarrow +\infty$ le lieu de Black tend vers une asymptote verticale d'abscisse $\varphi = -90^\circ$, cette asymptote correspond à l'asymptote horizontale du diagramme de phase (Bode) lorsque $\omega \rightarrow +\infty$.

Pour $\omega = 0$, la courbe démarre de $(0, 20 \log K)$.

Pour la pulsation de coupure, $\omega_c = \frac{1}{\tau}$

$$|H(j, \omega)|_{dB} = 20 \log K - 3 \text{dB}$$

La transition entre les diagrammes de Bode et le diagramme Black est immédiate en reportant directement point par point la phase et le module dans le plan de Black.

b) Système de 2^{ème} ordre

Le lieu de Black-Nichols d'un système de second ordre (Figure V.11) dont la fonction de transfert s'écrit :

$$H(s) = \frac{S(s)}{E(s)} = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot s + 1} \tag{V.35}$$

Démarré pour $\omega = 0$ du point $(0, 20 \log K)$ et tend lorsque $\omega \rightarrow \infty$ vers $-\infty$ le long d'une asymptote verticale d'abscisse -180° , mais comme pour les diagrammes de Bode et de Nyquist, la représentation du lieu de Black-Nichols d'un système de second ordre va aussi dépendre du coefficient d'amortissement ξ .

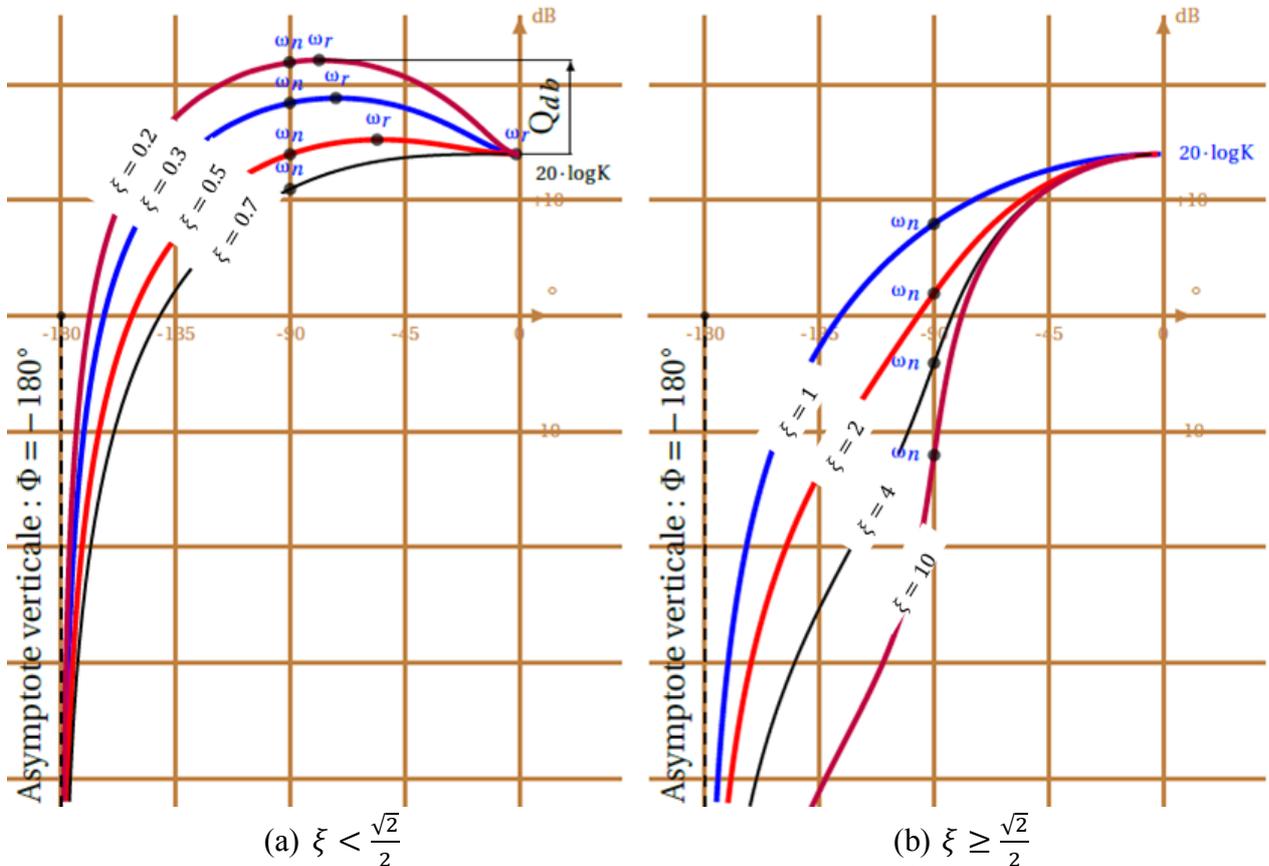


Figure V.11: Diagramme de Black-Nichols du 2^{ème} ordre

$\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$: Le lieu de Black présente un maximum pour la pulsation de résonance,

$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$, ce maximum est d'autant plus important que ξ est petit,

$$|H(\omega_r)| = Q |H(j\omega_0)| \text{ avec } Q = \frac{1}{2 \cdot \xi \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \xi \leq 1$: Le lieu de Black ne présente pas de dépassement ;

$1 \leq \xi$: La fonction de transfert se décompose en deux premiers ordres, il existe sur le lieu de Black un point d'inflexion distinctif où le coefficient d'amortissement ξ est important.

V.3.3.2 Diagramme de Black-Nichols généralisé

On peut généraliser la forme aux limites du diagramme de Black à partir de la généralisation des deux diagrammes de Bode en reprenant la forme générale de l'équation (V.22) :

$\omega \rightarrow \infty$: Le lieu de Black tend vers une asymptote verticale d'abscisse;

$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg(H(j.\omega)) = (n - m - \alpha). 90^\circ$ et le module en dB tend vers $-\infty$

$\omega \rightarrow 0$: la forme dépend de la classe α de la fonction de transfert :

$\alpha = 0$, le déphasage est nul et le module tend vers $20\log K$,

$\alpha > 0$, le lieu de Black présente une asymptote verticale d'abscisse $-\alpha.90^\circ$ et le module tend vers $+\infty$.

V.3.4 Abaque de Black-Nichols

L'abaque de Black-Nichols permet de déduire la réponse fréquentielle de la boucle fermée (FTBF) correspondante pour un retour unitaire uniquement à partir de la connaissance du lieu de transfert dans le plan de Black de la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO).

V.3.4.1 Interprétation géométrique du passage de la boucle ouverte à la boucle fermée

La figure V.12 présente le cas particulier du retour unitaire.

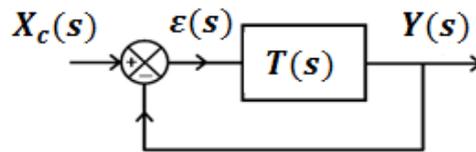


Figure V.12: Le cas du retour unitaire

Dans le cas d'un asservissement à retour unitaire tel que :

$$FTBF = H(s) = \frac{T(s)}{1 + T(s)} \quad \left(FTBF \text{ à retour unitaire} = \frac{FTBO}{1 + FTBO} \right) \quad (V.36)$$

Avec :

$$T(s) = G_{BO}(s). e^{j\varphi_{BO}(s)} = G_{BO}(s). [\cos\varphi_{BO}(s) + j\sin\varphi_{BO}(s)] \quad (V.37)$$

Tel que G_{BO} soit le gain et φ_{BO} soit la phase en boucle ouverte.

Soit :

$$H(s) = \frac{G_{BO}(s). e^{j\varphi_{BO}(s)}}{1 + G_{BO}(s). e^{j\varphi_{BO}(s)}} = \frac{G_{BO}(s)}{G_{BO}(s) + e^{-j\varphi_{BO}(s)}} \quad (V.38)$$

Pour $s = j.\omega \Rightarrow |H(j.\omega)| = \frac{G_{BO}(\omega)}{G_{BO}(\omega) + \cos\varphi_{BO}(\omega) - j\sin\varphi_{BO}(\omega)}$

En notant :

$$|H(j.\omega)| = G_{BF}(\omega). e^{j\varphi_{BF}(\omega)} \quad (V.39)$$

On obtient :

$$\left(\begin{array}{l} G_{BF}(\omega) = \frac{G_{BO}(\omega)}{\sqrt{G_{BO}^2(\omega) + 1 + 2.G_{BO}(\omega). \cos\varphi_{BO}(\omega)}} \\ \varphi_{BF}(\omega) = \arctan \frac{\sin\varphi_{BO}(\omega)}{G_{BO}(\omega) + \cos\varphi_{BO}(\omega)} \end{array} \right) \quad (V.40)$$

Ainsi, connaissant le FTBO ($G_{BO} \text{ dB}, \varphi_{BO}$) pour un ω donné, on peut déduire la FTBF ($G_{BF} \text{ dB}, \varphi_{BF}$)

Dans le système de coordonnées rectangulaires ($G_{BO} \text{ dB}, \varphi_{BO}$), on trace les courbes isomodules $G_{BF} \text{ dB} = cte$ (en traits continus) et isophases $\varphi_{BF} = cte$ (en pointillés) de la FTBF.

Courbe isomodule $G_{BF} \text{ dB} = cte$, tracée d'après :

$$\underline{T}(j, \omega) = \frac{\underline{H}(j, \omega)}{1 - \underline{H}(j, \omega)} = \frac{G_{BF} \cdot e^{j\varphi_{BF}}}{1 - G_{BF} \cdot e^{j\varphi_{BF}}} = \frac{G_{BF}}{-G_{BF} + \cos\varphi_{BF} - j\sin\varphi_{BF}} \quad (\text{V. 41})$$

Soit :

$$\left(\begin{array}{l} G_{BO} = \frac{G_{BF}}{\sqrt{G_{BF}^2 - 2 \cdot G_{BF} \cdot \cos\varphi_{BF} + 1}} \\ \varphi_{BO} = \arctan \frac{\sin\varphi_{BF}}{\cos\varphi_{BF} - G_{BF}} \end{array} \right. \quad (\text{V. 42})$$

Le tracé des courbes isomodules (traits continus verts sur la Figure V.13) est effectué pour : $G_{BF} \text{ dB} = cte$, dans le repère ($G_{BO} \text{ dB}, \varphi_{BO}$) en changeant φ_{BF} .

Le tracé des courbes isophases (traits pointillés rouges, Figure V.13) est effectué pour : $\varphi_{BF} = cte$, dans le repère ($G_{BO} \text{ dB}, \varphi_{BO}$) en changeant $G_{BF} \text{ dB}$.

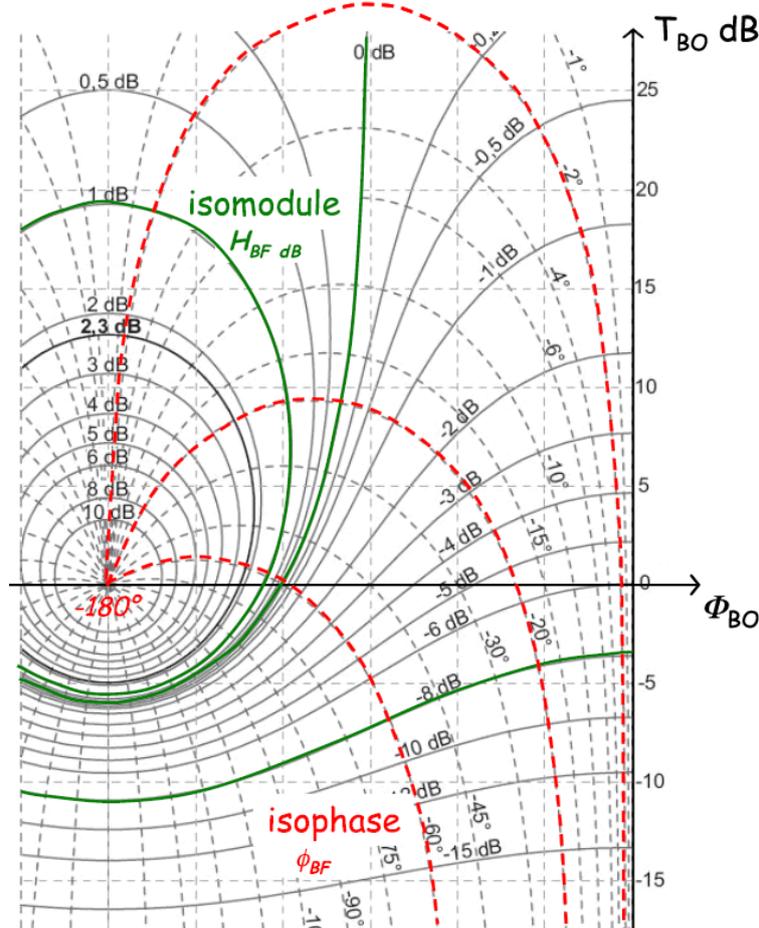


Figure V.13: Les courbes isomodules et isophases de l'abaque de Black-Nichols

V.3.4.2 Analyse des résonances

Dans cette partie, on considère un asservissement à retour unitaire résonant en boucle ouverte et en boucle fermée. Sa FTBO est tracée (en bleu) dans l'abaque de Black-Nichols sur la Figure V.14. Le suivi point à point du tracé de la FTBO, pour ω variant de 0 à $+\infty$, permet de déterminer la FTBF ; son gain en dB étant lu à l'intersection des isomodules et sa phase à l'intersection des isophases.

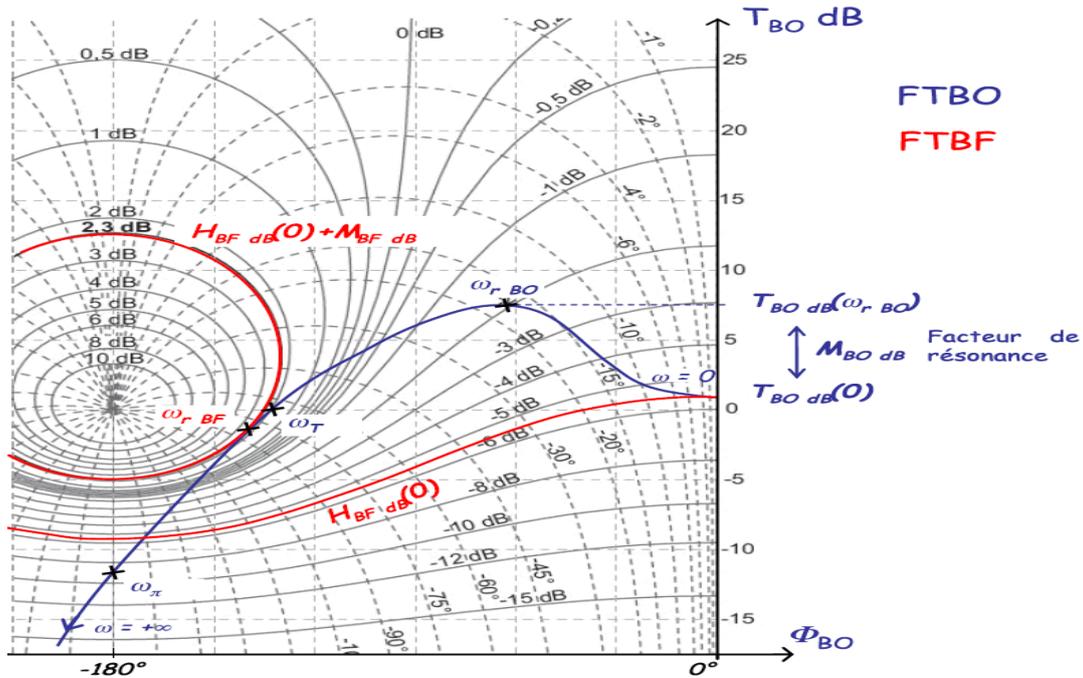


Figure V.14: L'analyse de la résonance

Pour $\omega = 0$, on lit le gain statique en boucle fermée $H_{BF} \text{ dB}(0) \approx 5,5 \text{ dB}$ sur l'isomodule correspondant (en rouge Figure V.14) et $\varphi_{BF} = 0^\circ$ sur l'isophase (confondue avec l'axe des ordonnées).

La présence d'un gain maximal en BF, est une résonance à la pulsation $\omega_{r BF}$, attestée par l'existence d'un point de contact entre la FTBO et l'isomodule $H_{BF} \text{ dB} = 2,3 \text{ dB}$ (Plus précisément la FTBO est tangente à cet isomodule, ce qui correspond à un gain supérieur au gain statique).

Il est important de distinguer les fréquences de résonance en BO $\omega_{r BO}$, et en BF $\omega_{r BF}$. L'allure du diagramme de Bode de la FTBF peut alors être tracé (Figure V.15) (en incluant certains points intermédiaires).

$$\text{Avec : } H_{BF} \text{ dB} (\omega_{r BF}) = H_{BF} \text{ dB}(0) + M_{BF} \text{ dB}$$

$H_{BF} \text{ dB}$: étant le facteur de résonance de la BF.

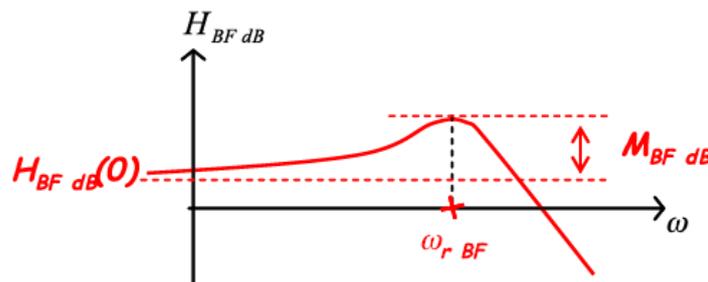


Figure V.15: Le module en dB de la FTBF

L'abaque de la Figure V.14 permet de relever deux autres pulsations utiles :

ω_T : la pulsation de transition telle que $H_{BO\ dB}(\omega_T) = 0\ dB$.

ω_π : telle que $\varphi_{BF}(\omega_\pi) = -180^\circ$.

V.3.4.3 Bande passante en boucle fermée

L'abaque de Black-Nichols permet également de déterminer rapidement la bande passante à $-\alpha\ dB$ en boucle fermée, c'est la pulsation de coupure correspondante ω_c (Figure V.16).

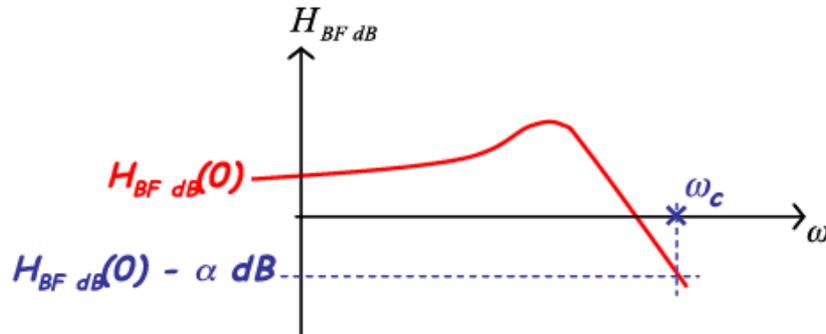


Figure V.16: La bande passante à $-\alpha\ dB$ de la BF

La méthode à suivre est illustrée par la figure V.17 partant de l'isomodule correspondant au gain statique ($H_{BF\ dB}(0)$ en rouge), on cherche le point d'intersection de la FTBO avec l'isomodule

$H_{BF\ dB}(0) - \alpha\ dB$ (en bleu) qui donne la pulsation de coupure correspondante ω_c .

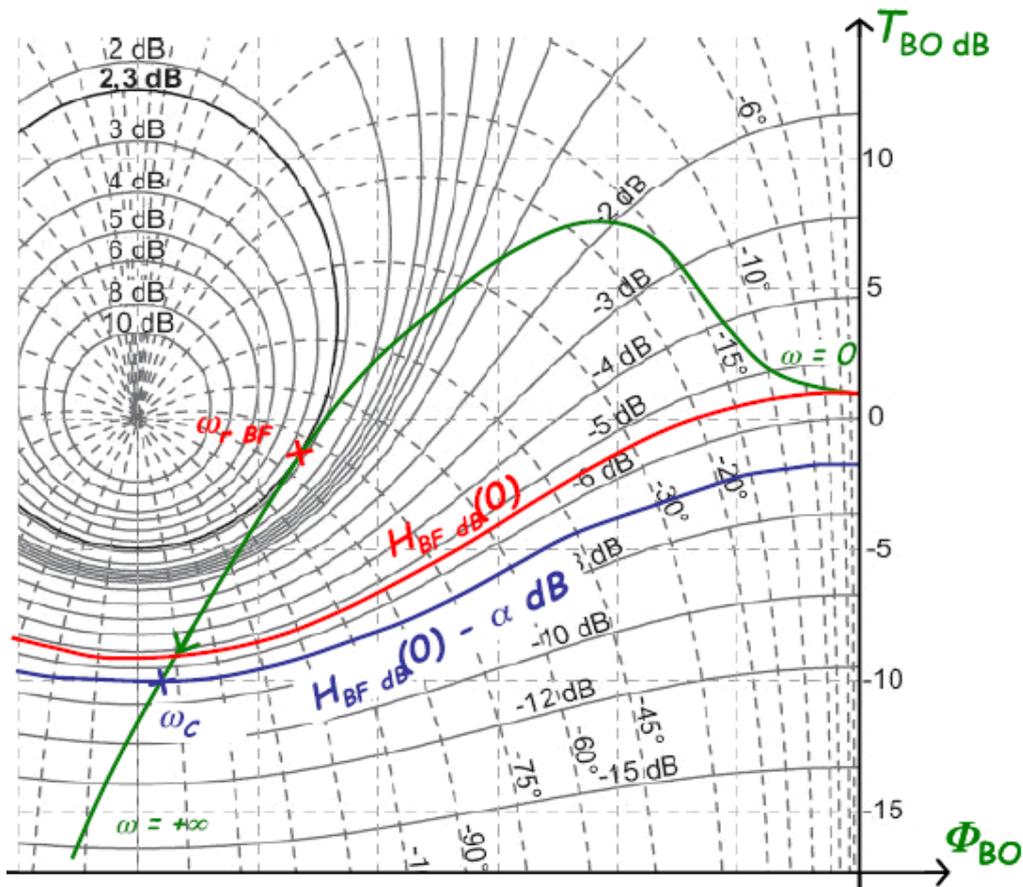


Figure V.17: La détermination de la bande passante à $-\alpha\ dB$ en BF

Travaux pratiques

TP N°=1**Système du premier ordre**

Une fonction de transfert du premier ordre appelée $H_1(p)$:

$$H_1(p) = \frac{1}{1 + 2p}$$

L'objectif de ce TP est d'écrire un programme dans le logiciel Matlab qui va:

- 1) Editer, puis afficher la fonction de transfert $H_1(p)$, en utilisant la commande **tf**
- 2) Calculer les zéros, les pôles et le gain de $H_1(p)$, en utilisant la commande **zpkdata**
- 3) Représenter les pôles et les zéros, en utilisant la commande **pzmap**.
- 4) Calculer et tracer la réponse impulsionnelle $y_1(t)$ sur la **figure 1**, en utilisant les commandes **impulse** et **plot**.
- 5) Calculer et tracer la réponse indicielle $y_2(t)$ sur la **figure 2**, en utilisant les commandes **step** et **plot**.
- 6) Calculer théoriquement et graphiquement de la **figure 2**, la constante de temps du système de premier ordre.
- 7) Déterminer théoriquement et graphiquement de la **figure 2**, le temps de réponse de ce système à **5 %**.

N.B : Un compte rendu du TP est remis à la prochaine séance.

Commenter les résultats obtenus

TP N°=2**Système du premier ordre**

Une fonction de transfert du deuxième ordre appelée $H_2(p)$:

$$H_2(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1}$$

L'objectif de ce TP est d'écrire un programme dans le logiciel Matlab qui va:

- 1) Editer, puis afficher la fonction de transfert $H_2(p)$, en utilisant la commande **tf**
- 2) Calculer les zéros, les pôles et le gain de $H_2(p)$, en utilisant la commande **zpkdata**
- 3) Représenter les pôles et les zéros, en utilisant la commande **pzmap**.
- 4) Calculer et tracer la réponse impulsionnelle $y_3(t)$ sur la **figure 3**, en utilisant les commandes **impulse** et **plot**.
- 5) Calculer et tracer la réponse indicielle $y_4(t)$ sur la **figure 4**, en utilisant les commandes **step** et **plot**.
- 6) Calculer théoriquement et graphiquement de la **figure 4**, le temps de montée (t_r) du système de deuxième ordre.
- 7) Déterminer théoriquement et graphiquement de la **figure 4**, le temps de réponse à **5%** (t_s) de ce système
- 8) Déterminer théoriquement et graphiquement de la **figure 4**, le temps de dépassement (t_p) et le dépassement (d%) de ce système.
- 9) En utilisant le **Matlab/Simulink (représentation par bloc)**, vérifier les résultats obtenus aux questions : 5 au 8,

N.B : Un compte rendu du TP est remis à la prochaine séance.

Commenter les résultats obtenus

TP N°=3

Réduction des schémas fonctionnels

Ecrire un programme dans le logiciel Matlab qui va:

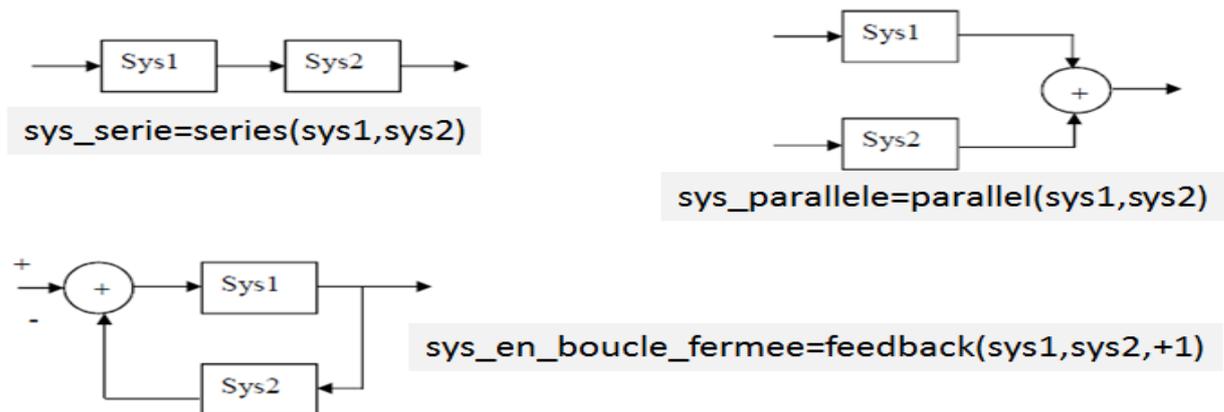
- 1) Editer, puis afficher les deux systèmes $sys1$, $sys2$, en utilisant la commande **tf**

$$sys1 = \frac{1}{1 + 2p}$$

$$sys2 = \frac{1}{p^2 + p + 1}$$

- 2) Assembler les deux systèmes (fonctions de transfert) :

En série, parallèle et en boucle fermée en utilisant les commandes suivantes :



- 3) Comparer les résultats obtenus en Matlab avec la théorie.
- 4) Calculer les zéros, les pôles et les gains des systèmes précédents (en série, parallèle et en boucle fermée), en utilisant la commande **zpkdata**
- 5) Représenter les pôles et les zéros, en utilisant la commande **pzmap**.
- 6) Calculer et tracer la réponse impulsionnelle $y5(t)$ sur la **figure 5**, en utilisant les commandes **impulse** et **plot** de la fonction de transfert **sys_serie**
- 7) Calculer et tracer la réponse indicielle $y6(t)$ sur la **figure 6**, en utilisant les commandes **step** et **plot** de la fonction de transfert **sys_serie**
- 8) Calculer théoriquement et graphiquement de la **figure 6**, le temps de montée (t_r) de la fonction de transfert **sys_serie**
- 9) Déterminer théoriquement et graphiquement de la **figure 6**, le temps de réponse à **5%** (t_s) de la fonction de transfert **sys_serie**
- 10) Déterminer théoriquement et graphiquement de la **figure 6**, le temps de dépassement (t_p) et le dépassement ($d\%$) de la fonction de transfert **sys_serie**

N.B : Le compte rendu du TP est remis à la fin de la séance

Références bibliographiques

Références bibliographiques :

- [1] ASSABAA .M. Module : Cours : AUTO 3 Asservissement et régulation, Département Productique Mécanique et Industrialisation, Institut Des Sciences Et Techniques Appliquées, Université des Frères Mentouri Constantine 1, 2^{ème} Année PMI_ISTA, PMI S4. [En ligne]. Disponible sur : <https://fac.umc.edu.dz/ista/pdf/cours/Cours%20AUTO3.pdf>
- [2] OGATA, Katsuhiko, et al. Modern control engineering. Upper Saddle River, NJ : Prentice hall, 2010. Disponible sur : http://docs.znu.ac.ir/members/pirmohamadi_ali/Control/Katsuhiko%20Ogata%20_%20Modern%20Control%20Engineering%205th%20Edition.pdf
- [3] Perez, Mario, Analía Pérez, and Elisa Pérez. "Introducción a los sistemas de control y modelo matemático para sistemas lineales invariantes en el tiempo." Universidad Nacional de San Juan (2008). Disponible sur : <http://dea.unsj.edu.ar/control1b/teoria/unidad1y2.pdf>
- [4] Maher CHAABENE, Mohamed DAMMAK. Cours, Travaux dirigés et travaux pratiques, Automatique et régulation : les systèmes linéaires continus, Institut Supérieur des études technologiques de Sfax, pour le technicien supérieur.
- [5] Mohammed-Karim FELLAH, Module : Partie 1 : Automatique 1 et 2(Asservissements Linéaires Continus), Département d'Electrotechnique, Université Djillali Liabès – Sidi Bel-Abbès, 3^{ème} Année Licence, 1^{ère} Année Master en Automatisme industriel.
- [6] Bourebia.O, Cours d'Asservissement Linéaire et Régulation /Licence Electronique L3, 2019/2020. Université Frère Mentouri - Constantine 1.
- [7] CHELBI Hassen, Cours : Automatique 1, ISET NABEUL, Licence Appliquée L2 en Génie Electrique, semestre 2.
- [8] Gabriel Cormier, Asservissements Linéaires GELE5313, Département de génie électrique, Université de Moncton.
- [9] DJEMAL Ridha, Cours : Chapitre 1 : Introduction aux systèmes linéaires, Maîtrise d'Electronique EL4, INPG Grenoble – France.
- [10] Jean-Max, Dutertre, Automatique Linéaire 1, 1A ISMIN-1A, Centre de Microélectronique de Provence, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, France, 2016. Disponible sur : <http://emes.fr/~dutertre>
- [11] Kadri Ahmed Yacine, régulation automatique, Niveau : 3^{ème} Année LM, Spécialité : Production, Forage, département de forage et mécanique des chantiers Pétroliers, Université Kasdi Merbah – Ouargla, Année Académique 2013/2014.
- [12] Yves Granjon, Cours et exercices corrigés : automatique, l'Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL), 2e édition, Dunod, 2001.
- [13] Bernard BAYLE, Automatique Continue, école d'ingénieurs, Télécom Physique, Strasbourg. Disponible sur : <http://eavr.u-strasbg.fr/~bernard>

- [14] Franck PLESTAN, commande cours, Département Automatique-Robotique, Année 2009/2010.
- [15] MEDDEB Ridha, CHALLOUF Imen, Support de Cours, TD, DS et Examens corrigés Systèmes Asservis Linéaires Continus, Département Génie électrique, Institut supérieur des études technologiques de Nabeul, 2019.
- [16] TP systèmes asservis, 3ème Année LMD/ Electrotechnique Faculté de Technologie, Département d'Electronique, Université Saâd Dahlab, Blida 1, 2015 / 2016.